# Краткая программа зачета (v14, февраль 2012)

## 1. Поля

1.1. Определение поля. Отсутствие в поле делителей нуля. Остатки по простому модулю как пример поля. Пример поля из 4 элементов.
1.2. Поле частных кольца: построение поля рациональных чисел и поля рациональных функций. Пример бесконечного поля конечной характеристики*.
1.3. Характеристика поля.
1.4*. Количество элементов в конечном поле — степень простого числа.
1.5*. Построение поля из $p^n$ элементов.

▷ Необходимо также уметь формально выводить несложные тождества из аксиом.

## 2. Действительные числа

2.1. Определение упорядоченного поля. Пример: рациональные числа.
2.2. Характеристика упорядоченного поля (любое упорядоченное поле содержит рациональные числа). Аксиома Архимеда и плотность рациональных чисел.
2.3*. Три определения полноты (разделяющий элемент, точные верхние грани, вложенные отрезки + аксиома Архимеда) и их эквивалентность.
2.4*. Пополнение упорядоченного множества по Дедекинду.
2.5. Определение действительных чисел. Существование и единственность действительных чисел*.
2.5. Точная верхняя грань суммы, точная верхняя грань произведения.
2.6. Существование корней и степень с рациональным показателем.
2.7. Принцип вложенных отрезков и десятичная запись числа.
2.8. Игра Банаха–Мазура и несчетность действительных чисел.

▷ Необходимо также уметь находить точные верхние и точные нижние грани конкретных множеств.

## 3. Многочлены

3.1. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики для многочленов.
3.2. Теорема Безу и ее следствия (число корней многочлена, единственность интерполяционного многочлена).
3.3. Китайская теорема об остатках для многочленов и существование интерполяционного многочлена. Китайская теорема об остатках как изоморфизм колец*.
3.4*. Интерполяционная формула Лагранжа. Интерполяционная формула Ньютона.
3.5*. Рациональные функции как пример неархимедова поля.

▷ Необходимо также уметь делить многочлены с остатком, искать НОД и его линейное представление, строить конкретные интерполяционные многочлены, рисовать эскизы графиков многочленов небольшой степени.

## 4. Асимптотические неравенства

4.1. Асимпотические неравенства и существенные асимптотические неравества (аксиомы линейного порядка, арифметика неравенств, бесконечно большие и бесконечно малые последовательности).
4.2. Асимптотическое сравнение многочленов. Многочлен нечетной степени принимает значения разных знаков.
4.3. Неравенство Бернулли. Асимптотическое сравнение показательной и степенной функции. Линейная независимость различных показательных функций*.

▷ Необходимо также уметь сравнивать асимптотически конкретные последовательности.