Множества IV: Ординалы

▷ **Определение 1.** Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*[1], если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент *("аксиома фундирования")*.

Задача 1. Какие из следующих упорядоченных множеств являются вполне упорядоченными?
а) ω (натуральные числа); б) $\omega+\omega$ (две последовательные копии натуральных чисел);
в) ω^2 (с лексикографическим порядком); г) $\mathbb{Z}^2$ (с лексикографическим порядком);
д) многочлены с натуральными коэффициентами (с асимптотическим порядком);
е*) равноправные игры (с порядком "быть опцией").

Задача 2. Пусть имеется набор утверждений A_s, занумерованных элементами вполне упорядоченного множества $(S,\prec)$. Тогда если для любого элемента s выполнен "шаг индукции"

$$\big(\forall t \prec s\ A_t\big) \Rightarrow A_s,$$

то все утверждения A_s истинны *("принцип математической индукции")*.

▷ **Определение 2.** Пусть s — элемент вполне упорядоченного множества S. *Следующим* элементом множества S называется элемент $s+1 := \min\{t \in S : s \prec t\}$.

Задача 3. Достаточно ли в условиях предыдущей задачи потребовать истинности первого утверждений и шага вида $A_s \Rightarrow A_{s+1}$?

▷ **Определение 3.** Элемент вполне упорядоченного множества, у которого нет предыдущего, называется *предельным*.

Задача 4. Опишите предельные элементы для упорядоченных множеств из пунктов а–д) первой задачи.

Задача 5. Любой элемент вполне упорядоченного множества может быть представлен в виде $s+n$, где s — предельный элемент, а n — целое неотрицательное число.

Задача 6*. Всякое множество может быть вполне упорядоченно[2] *("лемма Цермело")*.
Указание: зафиксируем отображение ϕ, сопоставляющее каждому собственному подмножеству S множества X элемент из $X \setminus S$; тогда существует ровно один способ вполне упорядочить X так, чтобы выполнялось условие $\phi\big([0;x)\big) = x$.

Задача 7. а) Если A — бесконечное множество, A' — множество его предельных элементов (для какого-то полного порядка), то $|A| = |A' \times \mathbb{N}|$.
б) $|A| = |A \times \mathbb{N}|$ для любого бесконечного множества A.
в) $|A \sqcup A| = |A|$ для любого бесконечного множества A.

---

[1] *Well-ordered* — не путать с *completely ordered* из определения действительных чисел.
[2] Этим утверждением можно далее пользоваться без доказательства.

Дополнительная часть: Ординалы и кардиналы

▷ **Определение 4.** Подмножество I вполне упорядоченного множества S называется его *начальным отрезком*, если вместе с любым элементом оно содержит все меньшие.

Задача 8. Любой начальный отрезок вполне упорядоченного множества S либо имеет вид $[0; s) := \{x \in S : x \prec s\}$, либо совпадает со всем S.

Задача 9. а) Любое вполне упорядоченное множество либо конечно, либо имеет начальный отрезок, изоморфный ω.
б) Любое вполне упорядоченное множество либо изоморфно начальному отрезку ω^2, либо содержит ω^2 в качестве начального отрезка.

▷ **Определение 5.** Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются *ординалами*[3]. Будем говорить, что один ординал не больше другого, если первый является начальным отрезком второго.

Задача 10. а) Любые два ординала сравнимы. (Указание: индукция поможет.)
б) Любые два множества сравнимы по мощности.

Задача 11. Ординал строго больше любого своего собственного начального отрезка.

Задача 12. Любое множество ординалов имеет наименьший элемент.
▷ Таким образом, класс всех ординалов вполне упорядочен и любое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому начальному отрезку этого класса.

Задача 13*. Класс всех ординалов не является множеством *("парадокс Бурали–Форти")*.

▷ **Определение 6.** Наименьший ординал, равномощный множеству A, называется *кардинальным числом* или *мощностью* этого множества[4]. Обозначение: $|A|$.

Задача 14. а) Последнее определение корректно (в том смысле, что введенное ранее сравнение мощностей соответствует сравнению кардинальных чисел).
б) Класс кардиналов вполне упорядочен относительно сравнения мощностей. В частности, для любой совокупности мощностей существует минимальная не входящаяя в нее мощность.

Задача 15*. $|A^2| = |A|$ для любого бесконечного множества A.
Указание: проведите индукцию по кардиналам.

Задача 16.** Пусть $\aleph_1$ — минимальная несчетная мощность. Верно ли, что $\aleph_1 = c$?

[3] Так как такие классы не являются множествами, в формальной теории множеств часто вместо класса рассматривают некоторый выделенный представитель этого класса — а именно, тот, для которого $[0; x) = x$.

[4] Другими словами, кардинал — это ординал, любой собственный начальный отрезок которого имеет меньшую мощность.