Аксиомы геометрии I: Аффинные плоскости

▷ **Определение 1.** *Аффинной плоскостью* называется непустое множество S (“точки”) и некоторый набор L его непустых подмножеств (“прямые”), такой что выполнены следующие аксиомы.
A1) Для любых двух (различных) точек существует одна и только одна содержащая их прямая.
A2) Для любой прямой l и любой точки x, не лежащей на этой прямой, существут одна и только одна проходящая через точку x прямая, не имеющая с прямой l общих точек.
A3) Существует хотя бы одна прямая, и для любой прямой существует не лежащая на ней точка.

Задача 1. а) Любые две различные прямые либо не имеют общих точек (“параллельны”), либо имеют ровно одну общюю точку (“пересекаются”).
б) Если считать совпадающие прямые параллельными, то параллельность — отношение эквивалентности.
в) Если прямые l и l' параллельны, то любая прямая, пересекающаяся с l, пересекается и с l'.

Задача 2. а) На аффинной плоскости не менее 4 точек.
б) Существует аффинная плоскость из 4 точек. (Сколько на ней прямых?)

Задача 3. Может ли какая-либо прямая состоять из 1 точки?

Задача 4. Пусть прямая l аффинной плоскости состоит из q точек. Сколько существует прямых, проходящих через не лежащую на l точку x?

Задача 5. Любые две прямые равномощны.

▷ **Определение 2.** Количество точек на прямой называется *порядком* аффинной плоскости.

Задача 6. Сколько на плоскости порядка q а) точек; б) прямых?

Задача 7. Существует ли аффинная плоскость из а) 6 точек; б) 9 точек?

▷ **Определение 3.** *Аффинной плоскостью над* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ называется пара $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (S, L)$ из множества $S = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ пар остатков по модулю n и совокупности всех подмножеств в S, представимых в виде $\{x, y : ax + by + c = 0\}$ $(a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; a и b не равны нулю одновременно).

Задача 8. Нарисуйте $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Задача 9. Всегда ли $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ является аффинной плоскостью в смысле определения 1?

Задача 10*. Существует ли аффинная плоскость порядка а) 4; б**) 14?

▷ **Задача Эйлера.** В каждом из n полков служат по n офицеров n различных званий. Можно ли построить этих n^2 офицеров в каре так, чтобы n офицеров, стоящие в каждой колонне и в каждой шеренге, были n разных званий и служили в n разных полках?

Задача 11. Имеет ли задача Эйлера решение для n, равного а) 3; б) 4; в) 5; г*) 6; д**) 14?