Игры и числа II: Хакенбуш

▷ **Определение 1.** *Неравноправной игрой* называется (не обязательно конечный) ориентированный граф с отмеченной вершиной и раскраской ребер в два цвета, L и R, любой ориентированный путь в котором имеет конечную длину.

Два игрока, *левый* и *правый*, играют в такую игру, начиная с отмеченной вершины и по очереди переходя по ребру своего цвета. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Задача 1. а) Пусть $-G$ — игра, полученная из G обращением цвета каждого ребра. Тогда $G + (-G) = 0$.
б) $G + (-H) = 0$ *(“равенство игр”)* — отношение эквивалентности.

▷ **Определение 2.** Игра G называется
— *нулевой* ($G = 0$), если в ней побеждает второй игрок;
— *положительной* ($G > 0$), если левый;
— *отрицательной* ($G < 0$), если правый;
— *нечеткой* ($G \parallel 0$), если первый.

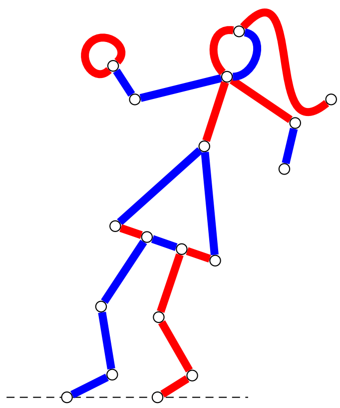
Задача 2. а) Любая[1] игра относится к одному из четырех классов из последнего определения.
б) Если игры равны, то они относятся к одному классу.

Задача 3. а) Сумма двух положительных игр положительна.
б*) Сумма двух нечетких игр может оказаться в любом из четырех классов.

▷ **Определение 3.** Пусть дан (неориентированный) связный граф с отмеченной вершиной и раскраской ребер в два цвета, L и R. Ход в игре *хакенбуш* (“рубка кустарника”) на этом графе состоит в том, что игрок перерубает одно ребро “своего” цвета — после чего часть, не связанная с отмеченной вершиной (“землей”), пропадает.

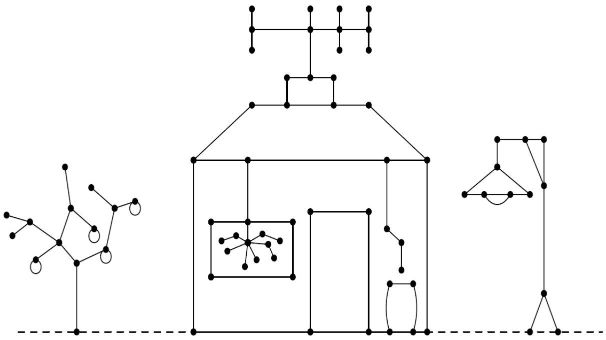
Задача 4. Никакой хакенбуш не является нечетким — другими словами, не существует графа, на котором в хакенбуш всегда выигрывает первый игрок (“любой хакенбуш сравним с нулем”).

Задача 5*. Является ли хакенбуш на графе ниже[2] положительным, отрицательным или нулевым?



[1] Разрешается доказать это утверждение для конечных игр, а использовать потом для произвольных.
[2] Земля изображается пунктиром. Ребра левого игрока синие, а правого — красные (от англ. *b**L**ue* и ***R**ed*).

Задача 6*. В “бесцветном хакенбуше” любому игроку разрешается перерубать любое ребро. Какой первый ход ведет к выигрышу в «Усадьбе Хакенбуш», изображенной на рисунке ниже?



Задача 7. Сумма хакенбушей на графах Γ и Γ′ — это хакенбуш на «кустарнике из двух кустов, Γ и Γ′».

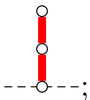
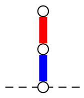
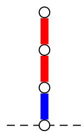
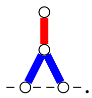
▷ **Определение 4.** Игра 1 — это хакенбуш на графе из одного ребра цвета L.

Если $^p/_q$ — рациональное число, то игра $^p/_q$ — это хакенбуш, который после умножения на q становится равен игре $p \cdot 1$.

Задача 8. Последнее определение корректно: если два хакенбуша равны одному и тому же числу, то они равны. Кроме того, сложение и сравнение игр соответствует сложению и сравнению чисел.

Задача 9. Среди хакенбушей есть все целые числа.

Задача 10. Найдите числовые значения хакенбушей на следующих графах

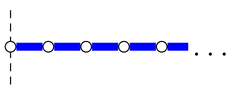
а) ; б) ; в) ; г) .

Задача 11*. а) Хакенбуш на любом конечном бамбуке является двоично-рациональным числом.
б) Сформулируйте и докажите правило вычисления конечных бамбуков.

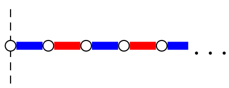
Задача 12*. Вычислите девушку из задачи 5.

Задача 13*. Существует ли конечный хакенбуш, равный $^1/_3$?

Задача 14. а) Хакенбуш на бесконечной в одну сторону цепочке из левых ребер больше любого натурального числа.



б) Хакенбуш на бесконечной в одну сторону цепочке, в которой все ребра с нечетными номерами левые, а с четными правые, равен $^1/_3$.



Дополнительная часть: Сюрреальные числа

▷ Любую позицию g игры G можно рассматривать как начальную позицию для новой игры — которую мы тоже будем обозначать g.

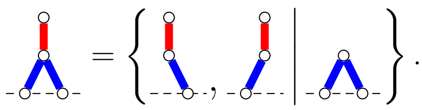
Задача 15. Если в хакенбуше у левого игрока есть ход из позиции g в позицию l, то $l < g$ (а если у правого игрока есть ход из g в r, то $g < r$).

▷ **Определение 5.** *Сюрреальные числа* — это совокупность всех игр, удовлетворяющих условию “монотонности” из предыдущей задачи, рассматриваемая с точностью до равенства игр.

Задача 16. а) Сумма двух чисел — число.
б) Любые два числа сравнимы.

▷ **Определение 6.** Пусть L и R — некоторые множества неравноправных игр. Тогда можно рассмотреть неравноправную игру G, состоящую в том, что первым ходом игрок выбирает одну из *опций* из “своего” множества, партия в которую затем и проводится.

Будем писать $G = L \mid R$. Например,



Задача 17. Вычислите а) $\{0 \mid 1\}$; б) $\{0 \mid {}^1\!/\!_2, 1\}$; в) $\{-1 \mid 5\}$.

Задача 18. Если $L \leqslant R$, то $L \mid R$ разделяет множества L и R.

Задача 19*. Как утверждение предыдущей задачи согласуется с тем, что сюрреальные числа неархимедовы?

Задача 20. а) Есть $L \leqslant R$ — конечные множества двоично-рациональных чисел, то $L \mid R$ — “простейшее” из двоично-рациональных чисел, разделяющих эти множества.
б) Любой конечный хакенбуш равен двоично-рациональному числу.

Задача 21*. а) Если $x = L \mid R$, $x' = L' \mid R'$, то $x + x' = \{x + R', L + x' \mid x + R', R + x'\}$.
б) Пусть в некотором упорядоченном поле $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant x' \leqslant b'$. Выясните, какие из 4 произведений $(x-a)(x'-a')$, $(x-a)(x'-b')$, $(x-b)(x'-a')$, $(x-b)(x'-b')$ положительны, и запишите результат в виде системы неравенств на xx'.
в) Пусть $x = L \mid R$, $x' = L' \mid R'$ и произведения между x, x' и всеми элементами множеств L, R, L', R' уже определены. Вдохновляясь предыдущими пунктами, напишите определение для xx'.

Задача 22*. а) Сюрреальные числа образуют кольцо.
б) Сюрреальные числа образуют поле.

Задача 23*. а) Вложите действительные числа в сюрреальные.
б) На поле существует порядок тогда и только тогда, когда оно изоморфно подполю сюрреальных чисел.