Игры и числа I: Ним

▷ **Определение 1.** *Равноправной игрой* называется (не обязательно конечный) ориентированный граф с отмеченной вершиной, любой ориентированный путь в котором имеет конечную длину. Вершины этого графа называются *позициями*, отмеченная вершина — *начальной позицией*, а ребра — (допустимыми) *ходами*.

Два игрока играют в такую игру, начиная с отмеченной вершины и по очереди переходя по ребру. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Задача 1. Представьте следующие игры в виде равноправных игр; выясните, кто из игроков обладает выигрышной стратегией.
а) Кучка из 8 камней; за ход можно брать 2 или 3 камня.
б) Доска 4×4, король в левом нижнем углу; короля можно двигать только вверх, вправо или вправо–вверх.

Задача 2. а*) Дайте формальное определение выигрышной стратегии.

В б) конечной; в*) любой равноправной игре один из двух игроков обладает выигрышной стратегией.

▷ **Определение 2.** Суммой двух равноправных игр G и H будем называть игру, позиции в которой — пары (позиция в G, позиция в H), а каждый ход — ход либо в игре G, либо в игре H.

Задача 3. Король, двигающийся вверх или вправо — это сумма двух игр типа «кучка, из которой берут ровно по одному камню».

Задача 4. Если в игре H побеждает второй игрок, то в игре $G + H$ побеждает тот же игрок, что и в игре G.

▷ **Определение 3.** Если в игре H побеждает второй игрок, будем говорить, что игра H является нулевой (и писать $H = 0$).

Задача 5. а) $H + H = 0$ для любой игры H.
б) Если $G + H = 0$, то в играх G и H побеждает один и тот же игрок.

▷ **Определение 4.** Две равноправные игры называются *равными*, если $G + H = 0$.

Задача 6. а) Равенство игр — отношение эквивалентности[1].
б*) Операция сложения корректно определена на классах эквивалентности игр и ассоциативна.

[1] Далее говоря об играх мы будем, на самом деле, иметь в виду соответствующие классы эквивалентности. Конечно, это требует разнообразных проверок корректности типа следующего пункта (его утверждением можно далее пользоваться без доказательства).

▷ **Определение 5.** *Ним-числом* $*n$ называется игра в кучку из n камней, из которой можно брать произвольное число камней.

Ним — это игра в какую-то сумму ним-чисел. Другими словами, в игре ним имеется несколько кучек камней, а за ход разрешается брать любое (ненулевое) количество камней из одной кучки.

Задача 7. Решите игру ним для а) двух кучек; б) произвольного количества кучек, в каждой из которых не более двух камней.

Задача 8. Хотя во всех ненулевых ним-числах выигрывает первый игрок, все они различны: $*n \neq *m$ при $n \neq m$.

Задача 9. Докажите, что каждая из следующих игр равна ним-числу, и найдите эти числа. а) $*2 + *1$; б) $*3 + *1$.

▷ **Определение 6.** Пусть $\{g_i\}$ — некоторое множество равноправных игр. Тогда можно рассмотреть равноправную игру G, состоящую в том, что первым ходом выбирается одна из *опций* g_i, партия в которую затем и проводится.

Будем писать $G = \{g_i\}$ ("множество игр — снова игра").

Задача 10. $*0 = \varnothing$, $*n = \{*0, *1, \ldots, *(n-1)\}$.

Задача 11*. Пусть P — некоторое утверждение о равноправных играх, такое что $(\forall g \in G\ P(g)) \Rightarrow P(G)$ ("если утверждение верно для каждой опции игры, то оно верно и для самой игры"). Тогда утверждение P верно для всех игр.
(Контрольный вопрос: где скрыта база этой разновидности индукции?)

Задача 12. а) Пусть $G = \{*n_1, *n_2, \ldots, *n_k\}$. Тогда $G = *\min\{n \in \mathbb{N} \mid *n \notin G\}$. Другими словами, если все опции игры равны ним-числам, то игра равна наименьшей из отсутствующих опций *("правило наименьшего отсутствующего")*.
б*) Любая конечная равноправная игра равна некоторому ним-числу *("теорема Шпрага–Гранди")*. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда это число нулевое.

Задача 13. а) $*n + *m = \{*n + *j \mid 0 \leqslant j < m\} \cup \{*i + *m \mid 0 \leqslant i < n\}$.
б) В таблице сложения ним-чисел в каждой клетке стоит наименьшее ним-число, не встречающееся ни строго над ним, ни строго слева от него *("правило наименьшего отсутствующего для суммы")*.
в) Составьте таблицу сложения для ним-чисел от $*0$ до $*7$ и выясните, кто выигрывает в ниме $*1 + *3 + *5 + *7$.

Задача 14. Назовем ненулевое ним-число *примитивным*, если его нельзя получить, складывая меньшие ним-числа. Выпишите несколько первых примитивных ним-чисел, после чего сформулируйте и докажите какое-нибудь утверждение.

Задача 15. а) Как складывать ним-числа? б) Как играть в ним?

Задача 16*. Как определить умножение ним-чисел, чтобы получилось поле? *(Указание: умножение можно строить рекурсивно, пользуясь правилом наименьшего отсутствующего.)*