Монодромия

▷ **Определение 1.** Пусть P — неприводимый комплексный многочлен от двух переменных. Будем рассматривать $P(z,a)=0$ как уравнение на z, зависящее от параметра a. Если параметр проходит по петле γ, не содержащей точек ветвления (т. е. точек, в которых уравнение имеет кратные корни), то корни уравнения как-то переставляются. Эта перестановка называется *преобразованием монодромии* уравнения вдоль петли γ.

Формально можно говорить о разветвленном накрытии пространства параметров комплексной кривой $P(z,a)=0$ и подъемах петли γ (см. конец листка «Эйлерова характеристика и накрытия»), индуцирующих отображение $\tilde\gamma(0)\mapsto\tilde\gamma(1)$ слоя над началом пути.

Задача 1. а) Преобразование монодромии биективно.
б) Совокупность преобразований монодромии, соответствующих путям с началом и концом в данной точке, образует группу (“*группа монодромии* уравнения”).
в) Группа монодромии не зависит от выбора точки.
г) Преобразование монодромии при обходе по петле является произведением преобразований монодромии, соответствующих особым точкам внутри пути.

Задача 2. Найдите группу монодромии уравнения а) $\exp z=a$; б) $z^n=a$; в) $z^3-z=a$.

▷ Будем также говорить о монодромии многозначных функций, не выписывая явно соответствующее уравнение (например, вместо монодромии уравнения $z^n=a$ — о монодромии многозначной функции $z\mapsto\sqrt[n]{z}$).

С точки зрения комплексных кривых и разветвленных накрытий можно говорить о *римановой поверхности данной многозначной функции* — (разветвленном) накрытии, в котором над каждой точкой $\mathbb{C}$ висит множество значений многозначной функции.

Задача 3. Найдите точки ветвления и группу монодромии многозначной функции
а) $\sqrt{z}+\sqrt{1-z}$; б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{z}}$.

▷ **Определение 2.** Если у группы G есть нормальная подгруппа H_1, фактор по которой изоморфен группе H_2, то говорят, что группа G является *расширением* группы H_2 при помощи группы H_1 и пишут

$$1\to H_1\to G\to H_2\to 1.$$

Тривиальный пример:

$$1\to H_1\to H_1\times H_2\to H_2\to 1;$$

еще примеры:

$$0\to\mathbb{Z}/2\xrightarrow{\cdot 2}\mathbb{Z}/4\to\mathbb{Z}/2\to 0;$$

$$1\to A_n\to S_n\xrightarrow{\mathrm{sgn}}\{\pm1\}\to 1;\quad 1\to SO(n)\to O(n)\xrightarrow{\det}\{\pm1\}\to 1.$$

Задача 4. Когда расширение $0\to\mathbb{Z}/m\to\mathbb{Z}/nm\to\mathbb{Z}/n\to 0$ тривиально?

Задача 5. Группа монодромии композиции двух многозначных функций является расширением группы монодромии одной из них при помощи другой.

▷ **Определение 3.** Разрешимая группа — это группа, которая получается (из тривиальной) последовательностью расширений при помощи циклических групп.

Задача 6. а) Коммутативная группа разрешима.
б) Группы S_3 и S_4 разрешимы. в) Группа S_5 не разрешима.

Задача 7. Если уравнение $f(z) = a$ разрешимо в радикалах, то группа монодромии этого уравнения разрешима.

Задача 8. Группа монодромии уравнения $z^5 - z = a$ не разрешима (и как следствие, корень этого уравнения не может быть выражен через a в радикалах).