Поверхности II: Эйлерова характеристика и накрытия

▷ **Определение 1.** *Эйлерова характеристика* компактной триангулированной поверхности S — это целое число $\chi(S) := V - E + F$, где V, E, F — количества, соответственно, вершин, ребер, треугольников триангуляции[1].

Это число не зависит от выбора триангуляции и для замкнутой поверхности совпадает с суммой индексов особых точек векторного поля (см. листок «Поверхности»).

Можно распространить это определение и на многообразия (и не только) произвольной размерности.

Задача 1. $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ для компактных A и B.

Задача 2. Что происходит с эйлеровой характеристикой при связной сумме?

▷ **Определение 2.** Непрерывное отображение $\widetilde{X} \to X$ называется k-листным *накрытием*, если у любой точки пространства X есть окрестность U, прообраз которой гомеоморфен[2] несвязному объединению k копий U.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d] & U^{\sqcup k} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ X & U \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Любое пространство можно накрыть k его копиями ("тривиальное накрытие"). Пример нетривиального (бесконечнолистного) накрытия: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$.

Задача 3. $z \mapsto z^k \colon S^1 \to S^1$ (где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) — k-листное накрытие.

Задача 4. Приведите пример нетривиального накрытия восьмерки.

Задача 5. Если пространство X накрыто k-листно пространством Y, то $\chi(Y) = k \cdot \chi(X)$.

Задача 6. У сферы не бывает нетривиальных а$_1$) компактных; а$_2^*$) никаких накрытий. Вторым пунктом можно пользоваться далее без доказательства.
б*) $\mathbb{R}P^2$ может быть нетривиально накрыто только сферой S^2 (или несвязным объединением нескольких сфер).

Задача 7. Существует додекаэдр (правильный многогранник с пятиугольными гранями).
Указание. Если правильными пятиугольниками не получается замостить сферу, то получится замостить какое-то ее накрытие.

▷ **Определение 3.** Говорят, что связная замкнутая поверхность имеет *род* g, если она представляет собой сферу с g ручками.

Задача 8. При каких g и $\tilde{g}$ поверхность рода g можно накрыть поверхностью рода $\tilde{g}$?

Задача 9. а) Проекция «$(x, y) \mapsto x$» кривой $y^k = P(x)$ на $\mathbb{C}P^1$ является k-листным *разветвленным накрытием* (т. е. k-листным накрытием вне конечного числа точек).
б) Если многочлен P не имеет кратных корней, то комплексная кривая $y^k = P(x)$ в $\mathbb{C}P^2$ является замкнутой поверхностью; в) ...причем ориентируемой.

Задача 10. Найдите род следующих комплексных кривых:
а) квадрики;
б) *эллиптической кривой* $y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;
в) *гиперэллиптической кривой* $y^2 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$;
г) *кривой Ферма* $X^n + Y^n = Z^n$.
Указание. Число точек на бесконечности надо считать равным числу компонент связности "над проколотой окрестностью бесконечности".

[1]Кроме триангуляций можно рассматривать и разбиения на произвольные многоугольники.
[2]Причем проекция совпадает со стандартной.

Дополнительная часть: Подъем отображений

Задача 11. а) Если $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие, то каждый путь $\gamma\colon [0;1] \to X$ может быть поднят до пути $\tilde{\gamma}\colon [0;1] \to \widetilde{X}$ (такого, что $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d, dashed] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

б) Каждое отображение $f\colon S^1 \to S^1$ может быть поднято до отображения $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
в*) Если $\widetilde{Y} \to Y$ — накрытие, то каждое отображение $f\colon X \to Y$ может быть поднято до отображения $\tilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, область определения которого — какое-то (возможно, зависящее от f) накрытие $\widetilde{X} \to X$.

Задача [34д]10а. Отображение $\mathbb{R}P^2$ в себя имеет неподвижную точку.

▷ **Определение 4.** *Степенью* отображения $\gamma\colon S^1 \to S^1$ называется целое число $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ для подъема отображения γ на накрытие $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Задача 12. а) Степень отображения не меняется при непрерывных деформациях: если $t \mapsto \gamma_t\colon [0;1] \to \mathrm{Map}(S^1, S^1)$ — непрерывное отображение, то $\deg\gamma_0 = \deg\gamma_1$.
б*) Степень — единственный такой инвариант (т. е. если два отображения окружности в себя имеют равные степени, одно можно продеформировать в другое).