

Графы I

- ▷ **Определение 1.** *Графом*¹ называется пара (V, E) из конечного множества V и множества E , состоящего из неупорядоченных пар различных элементов V . Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – *ребрами*.

Задача 1. а) Нарисуйте граф, вершинами которого являются страны, входившие в состав СССР, а ребрами соединены граничащие по суше страны.

б) Нарисуйте граф, вершинами которого являются натуральные числа от 2 до 15, а ребрами соединены различные числа, одно из которых делится на другое.

Задача 2. а) В каждой компании из шести человек найдутся либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых человека.

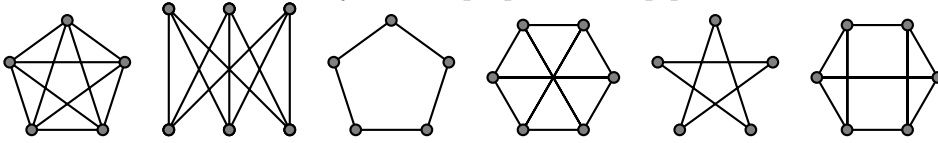
б) Верно ли это для компании из пяти человек?

Задача 3. Сколько существует графов на множестве вершин $\{1, 2, \dots, n\}$? Сколько из них имеют ровно m ребер?

- ▷ **Определение 2.** Графы $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$, что вершины A и B графа Γ_1 соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины $f(A)$ и $f(B)$ соединены ребром в графе Γ_2 .

Задача 4. Изоморфизм графов — отношение эквивалентности.

Задача 5. Какие из следующих графов изоморфны?



- ▷ Первый слева граф называется K_5 (полный граф с пятью вершинами), второй – $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле, «домики и колодцы»).

Задача 6. а) Сколько, с точностью до изоморфизма, существует графов с не более чем четырьмя вершинами? б) ровно с пятью вершинами?

- ▷ **Определение 3.** *Путь* в графе называется последовательность вершин v_1, v_2, \dots, v_k , в которой каждая вершина соединена ребром со следующей (говорят, что путь *проходит* по этим ребрам). Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Задача 7. Каких графов с n пронумерованными вершинами больше, связных или несвязных?

- ▷ **Определение 4.** *Степенью* (или *валентностью*) вершины A называется число выходящих из нее ребер. Обозначение: $\deg A$.

Задача 8. Существует ли граф с хотя бы двумя вершинами, в котором степени всех вершин различны?

Задача 9. Существует ли граф

а) с 1000 ребер, в котором степень каждой вершины равна 57?

б*) с n вершинами, в котором степень каждой вершины равна d ?

¹Точнее, неориентированным графом без петель и кратных ребер

- ▷ **Определение 5.** *Циклом* в графе называется путь с совпадающими первой и последней вершиной, который проходит по каждому ребру не более одного раза. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Задача 10. а) У дерева есть вершина степени один. б) Таких вершин хотя бы две.

Задача 11. а) Сколько ребер в дереве с n вершинами?

б) Верно ли, что любой граф с n вершинами, в котором столько ребер — дерево?

Задача 12. Из любого связного графа можно выкинуть часть ребер так, чтобы получилось дерево (“остовное дерево”).

Задача 13* (теорема Кэли). Сколько у полного графа с n вершинами остовных деревьев? (Указание: начните с $n = 2, 3, 4...$)

Задача 14. Какое максимальное число ребер может быть в графе из 1000 вершин, если его вершины можно раскрасить а) в 2 цвета; б) в 5 цветов так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета?

- ▷ **Определение 6.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две части так, что все ребра соединяют вершины из разных частей.

Задача 15. а) В двудольном графе нет циклов нечетной длины. б) Верно ли обратное?

Задача 16* (теорема Холла). Если в двудольном графе любые k элементов первой доли связаны по крайней мере с k элементами второй доли, то каждой вершине первой доли можно поставить в соответствие соединенную с ней вершину второй доли так, чтобы эти вершины были различны.

Задача 17. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 198 перелетов.

Задача 17 $\frac{1}{2}$. Хозяйка собирается принимать гостей и испекла для них пирог. Она знает, что придут либо ровно p , либо ровно q гостей, причем p и q взаимно просты. На какое минимальное число (не обязательно равных) кусков можно разрезать пирог, чтобы его в любом случае можно было разделить между гостями поровну?

Задача 18. Из связного графа можно выбросить вершину со всеми исходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

- ▷ **Определение 7.** Граф называется *планарным* (или *плоским*), если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались. Части, на которые ребра при этом делят плоскость, называются *гранями*.

Количества вершин, ребер и граней графа далее обозначаются V , E и F соответственно (от *vertices*, *edges* и *faces*).

Задача 19 (формула Эйлера).

а) Для связного планарного графа $V - E + F = 2$.

б) Чему равно $V - E + F$ для несвязного графа?

в) Чему равно $V - E + F$ для выпуклого многогранника?

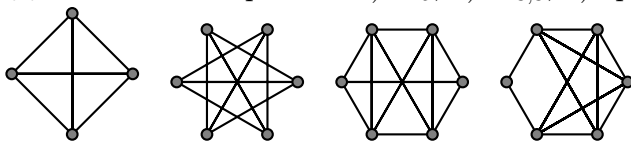
Задача 20. Докажите, что для любого планарного графа

а) если $E > 1$, то $2E \geq 3F$;

б) если граф двудолен и $E > 1$, то $E \geq 2F$;

в) если $V > 2$, то $E \leq 3V - 6$ (для любого ли $V > 2$ может достигаться равенство)?

Задача 21. Планарны ли а) K_5 ; б) $K_{3,3}$; в) графы из задач 1 и 5; г) графы на рисунке?



Задача 22*. Граф, имеющий 10 вершин степени 5, не планарен.

Задача 23. а) В планарном графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

б) Вершины планарного графа можно покрасить в 6 цветов так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета. в*) Тот же вопрос для 5 цветов.

г*) Грани планарного графа можно покрасить в 5 цветов так, что граничащие по ребрам грани покрашены в разные цвета. д**) Тот же вопрос для 4 цветов.

Задача 24*. Любой планарный граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра были непересекающимися отрезками.

- ▷ **Определение 8.** Два графа называются *гомеоморфными*, если один из них можно получить из другого применением нескольких операций вида: 1) заменить вершину степени 2 вместе с исходящими из нее ребрами на ребро, соединяющее ее соседей; 2) заменить ребро на вершину степени 2, соединенную с концами удаляемого ребра.

Задача 25* (теорема Понтрягина–Куратовского). Докажите, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Задача 26. Нарисуйте граф K_5 на торе. Чему для него равно число $V - E + F$?

Задача 27*. Докажите, что число $V - E + F$ не зависит от выбора графа, вложенного в сферу с g ручками (сформулируйте самостоятельно, какие графы здесь следует считать вложенными). Это число называется *эйлеровой характеристикой* сферы с g ручками.



Задача 28. а) Чему равна эйлерова характеристика сферы, тора, сферы с двумя ручками? б*) А сферы с g ручками?