Вычеты и суммы

▷ **Определение 1.** Пусть f — функция, голоморфная в *проколотой* окрестности точки z_0. *Вычетом* формы $f(z)\,dz$ в точке z_0 называется интеграл

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)\,dz := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(z_0)} f(z)\,dz.$$

Задача 0. Если $f(z) = \frac{a}{z-z_0} + g(z)$, а функция g голомофрна в точке z_0, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)\,dz = a$.

Задача 1. Найдите вычеты формы а) $\dfrac{dz}{z^2+1}$; б) $\operatorname{tg} z\,dz$; в) $z^n \sin z\,dz$ во всех точках.

Задача 2. Вычет формы не зависит[1] от выбора локальной координаты:

$$\operatorname*{res}_{z=Z(w_0)} f(z)\,dz = \operatorname*{res}_{w=w_0} f(Z(w))Z'(w)\,dw$$

для любой функции $Z(w)$, голоморфной в точке w_0.

Задача 3. а) $\operatorname{res}\left\{(1-z)^{-(n+1)}\dfrac{dz}{z^{k+1}}\right\} = \operatorname{res}\left\{(1+w)^{n+k}\dfrac{dw}{w^{k+1}}\right\}$; б) $\operatorname{res}\left\{(1-4z)^{-1/2}\dfrac{dz}{z^{k+1}}\right\}$.

Задача 4. Найдите вычет на бесконечности формы $z^n\,dz$.

Задача 5. Сумма вычетов голоморфной формы по всем точкам *сферы Римана* $\mathbb{C}P^1 := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ равна нулю.

Задача 6. Найдите вычеты формы $z^2 \operatorname{ctg} z\,dz$ во всех точках сферы Римана.

▷ Напомним, что (для натуральных k) по определению $\zeta(k) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^k}$.

Задача 7. $\zeta(2k) = -\frac{1}{2}[z^{2k-1}]\big\{\operatorname{ctg}(\pi z)\big\} = (-1)^{k-1}\dfrac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$ (второе равенство можно считать определением чисел Бернулли).

Задача 8. Вычислите сумму $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{n^2+1}$.

[1] Именно поэтому мы определяем вычет для форм, а не для функций.

▷ Напомним[2], что $\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} t^s e^{-t}\frac{dt}{t}$ (при $s > 1$).

Задача 9. а) $\int\limits_0^{+\infty} t^s e^{-nt}\frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$; б) $\Gamma(s)\zeta(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1}\frac{dt}{t}$ (при $s > 1$).

Задача 10. а) (При $\operatorname{Re} s > 1$) $\int\limits_C \frac{z^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} = (e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s)$, где контур C обходит вокруг луча $[0; +\infty)$.

б) $\frac{\Gamma(1-s)e^{-\pi i s}}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z}$ — аналитическое продолжение ζ-функции на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{>0}$;

Задача 11. а) $\zeta(-k) = -k! \cdot [z^{k+1}]\left\{\frac{z}{e^z - 1}\right\} = -\frac{B_{k+1}}{k+1}$.

б*) Почему суммирование расходящихся рядов по Эйлеру (см. листок про формулу Эйлера–Маклорена и числа Бернулли) дает тот же ответ?

Задача 12. а) $\widehat{\zeta}(2k) = \widehat{\zeta}(1-2k)$, где $\widehat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$.
б*) $\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s)$.

[2]Определение гамма-функции, пригодное для произвольных комплексных s, можно узнать из одноименного листка.