Вероятность III: Случайное блуждание и центральная предельная теорема

▷ **Определение 1.** *Случайное блуждание* на (целых точках) прямой — это последовательность случайных величин (ξ_N) (“положение после хода N”), такая что ξ_N — сумма N независимых случайных величин, принимающих с равными вероятностями значения ± 1.

(Другими словами, мы ходим по целым точкам прямой, каждую секунду подкидывая монету и перемещаясь на ± 1 в зависимости от того, выпадет орел или решка.)

Задача 0. В какой точке вероятность обнаружить частицу после N шагов случайного блуждания на прямой максимальна?

▷ Как мы знаем из предыдущего листка по вероятности, дисперсия величины ξ_N пропорциональна N, то есть ее *среднеквадратичное отклонение* имеет порядок $\sqrt{N}$.

Задача 1. Если $R_N \gg \sqrt{N}$, то $P\{|\xi_N| < R_N\} = 1 - o(1)$ (для $R_N = \varepsilon N$ это закон больших чисел Бернулли).

Задача 2. Оцените вероятность того, что при 100 подкидываний монеты орел выпадет более 60 раз, с абсолютной погрешностью $\pm 0{,}01$. (Для справки: $\binom{100}{61} \cdot 2^{-100} \approx 0{,}0071$.)

Пусть $p_k(2N) = P\{\xi_{2N} = 2k\}$.

Задача 3. а) $p_k = 2^{-2N}\binom{2N}{N+k}$; б) $p_k = p_0\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)\left(1 - \frac{3}{N+2}\right)\dots\left(1 - \frac{2k-1}{N+k}\right)$.

Задача 4. а) $p_k \approx p_0 \exp\left(-\frac{k^2}{N}\right)$ (указание: $\ln(1+x) \approx x$); б) $p_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} + o(N^{-1/2})$.

Задача 5. Если $R_N \ll \sqrt{N}$, то $P\{|\xi_N| < R_N\} = o(1)$.

Задача 6. а) Матожидание числа возвращений частицы в начало координат бесконечно. б) При случайном блуждании на прямой частица почти наверное хоть раз возвращается в начало координат.

Задача 7*. После каждого подкидывания монетки первый игрок платит второму рубль, если выпал орел, и наоборот. Игра заканчивается, когда у одного из игроков заканчиваются деньги. У первого игрока n рублей, у второго — N рублей. Какова вероятность того, что первый игрок разорится?

▷ Как показывают задачи 1 и 5, при случайном блуждании частица почти наверное уходит от нуля на расстояние порядка $\sqrt{N}$. Естественный следующий вопрос — об аналогичных вероятностях для $R \sim \sqrt{N}$.

Задача 8. $P(a\sqrt{n} \leqslant \xi_n \leqslant b\sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b \exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right) dx + o(1)$;
в частности, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

▷ **Определение 2 (неформальное).** Будем говорить, что вещественнозначная случайная величина F имеет *плотность распределения* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, если

$$P\{a \leqslant F \leqslant b\} = \int_a^b p(x)\, dx.$$

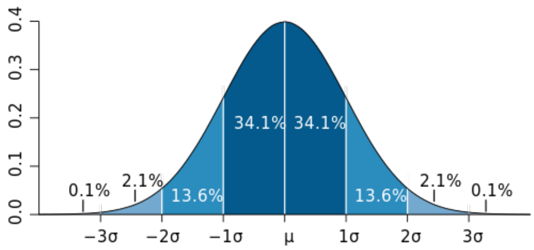
Распределение с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ называется *нормальным распределением Гаусса* с матожиданием μ и дисперсией σ^2 и обозначается $N(\mu, \sigma^2)$.

▷ Задача 5 показывает, что при случайном блуждании на прямой для величин $\eta_n = \xi_n/\sqrt{n}$ имеет место *слабая сходимость*[1] к величине F с плотностью $N(0, 1)$.

Это частный случай *центральной предельной теоремы* (состоящей, говоря очень грубо, в том, что нормальное распределение возникает при подобном усреднении *любых* случайных величин).

Задача 9. Пусть (ξ_N) — случайное блуждание на прямой, при котором на каждом шаге вероятность пойти вправо равна p.
а) Найдите матожидание μ_N и дисперсию σ_N^2 величины ξ_N.
б) Последовательность случайных величин $\eta_N = (\xi_N - \mu_N)/\sqrt{N}$ слабо сходится к величине F с плотностью $N(0, \sigma^2)$.

Задача 10. При достаточно больших N число орлов при N подкидываниях несимметричной монеты отклоняется от матожидания не более чем на $3\sigma_N$ с вероятностью, большей[2] 99,7% ("правило трех сигм"). С другой стороны, вероятность отклонения хотя бы на σ_N больше 30%.



Задача 11. а) Случайная величина F имеет плотность распределения p. Какую плотность распределения имеет величина $F + c$?
б) *Независимые* случайные величины F_1 и F_2 имеют плотности распределения p_1 и p_2. Какую плотность имеет случайная величина $F_1 + F_2$?

Задача 12. Сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин — нормально распределенная случайная величина (выведите из предыдущей задачи и объясните, почему это было очевидно и без нее).

[1] Т. е. для любого отрезка $P(\eta_n \in I) \to P(F \in I)$, $\quad n \to \infty$.
[2] Для оценки интеграла не возбраняется воспользоваться компьютером.