Листок 37д февраль 2014

Линейная алгебра III: Двойственность и скалярное произведение

Часть 1. Двойственность

▷ **Определение 1.** Пусть V — векторное пространство над полем k. *Двойственным* к нему пространством называется пространство $V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$. Элементы двойственного пространства называются *функционалами* на V.

Задача 1*. Какой может быть размерность ядра функционала на n-мерном пространстве?

Задача 2*. Опишите пространство, двойственное пространству $l_0(\mathbb{R})$ — финитных последовательностей вещественных чисел.

Задача 3*. Пусть $U \subset V$ — линейное подпространство. Постройте каноническое вложение $(V/U)^*$ в V^* и докажите, что фактор изоморфен U^*.

▷ **Определение 2.** Пусть A — линейное отображение из V в W. *Двойственным отображением* называется отображение A^* из W^* в V^*, такое что $[A^*f](v) = f(Av)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A^*f"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Задача 4*. Пусть в пространствах V и W выбраны базисы. Как связаны матрицы отображений A и A^*?

Задача 5*. $(AB)^* = B^*A^*$.

Задача 6*. а) Отображение $(x, f) \mapsto f(x)\colon V \times V^* \to k$, линейно по каждому аргументу.
б) Найдите в предыдущем пункте каноническое отображение $V \to V^{**}$. Докажите, что оно всегда инъективно, а в конечномерном случае и сюръективно.
в) При отождествлении пространства с дважды двойственным оператор A^{**} отождествляется с A.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V^{**} \arrow[r, "A^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Часть 2. Скалярное произведение

▷ **Определение 3.** Пусть V — векторное пространство над полем k. *Скалярным произведением* называется билинейное (линейное по каждому из аргументов) симметричное отображение $(-,-)\colon V \times V \to k$.

Примеры:
• $V = k^n$, $(u, v) = \sum_i u_i v_i$; • $V = C[0; 1]$, $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$;
• V — совокупность случайных величин на данном конечном вероятностном пространстве, $(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

Задача 7. Положим $\|v\| = (v, v)$. а) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| + 2(u, v)$.
б) (Если характеристика основного поля не равна двум, то) скалярное произведение может быть восстановлено по функции $v \mapsto (v, v)$.

▷ **Определение 4.** *Евклидовым пространством* называется вещественное пространство с таким скалярным произведением, что 1) $\forall v\ (v, v) \geqslant 0$; 2) $(v, v) = 0 \implies v = 0$.

Длиной вектора v евклидова пространства называется число $|v| := \sqrt{(v, v)}$. Вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Задача 8. Какие из примеров, приведенных после первого определения, являются примерами евклидовых пространств?

Задача 9. а) $2|(u,v)| \leqslant |u|^2 + |v|^2$; б) найдите $\inf\{|\lambda u|^2 + |\lambda^{-1} v|^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$;
в) $|(u,v)| \leqslant |u| \cdot |v|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора u и v пропорциональны ("неравенство Коши")[1].

Задача 10. а) $\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$; б) $\left(\int f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int f^2(t)\,dt \cdot \int g^2(t)\,dt$;
в) $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)^2 \leqslant V(\xi) \cdot V(\eta)$.

Задача 11. а) Для любого ненулевого вектора u множество $\{v \mid (u,v) = 0\}$ — гиперплоскость.
б) Для любого подпространства U евклидова пространства V его *ортогональное дополнение* $U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U\ (u,v) = 0\}$ является векторным пространством размерности $\dim V - \dim U$.

Задача 12. У любого конечномерного евклидова пространства можно выбрать базис, в котором скалярное произведение примет стандартный вид.

Задача 13. Если у двух векторов конечномерного евклидова пространства совпадают скалярные произведения со всеми векторами, то они равны.

▷ **Определение 5.** Скалярное произведение называется *невырожденным*, если отображение $v \mapsto (u \mapsto (u,v))\colon V \to V^*$ является изоморфизмом.

Задача 14*. Скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве невырождено.

Задача 15*. Утверждение задачи 11 выполнено для любого невырожденного скалярного произведения.

Задача 16*. Сколько существует различных (с точностью до изометрии) а) трехмерных; б) n-мерных векторных пространств с невырожденным скалярным произведением?

Часть 3. Векторное произведение

▷ **Определение 6.** Пусть V — трехмерное евклидово пространство с ориентированным объемом vol. *Векторным произведением* называется отображение $[-,-]\colon V \times V \to V$, такое что $(u,[v,w]) = \mathrm{vol}(u,v,w)$ ("смешанное произведение трех векторов равно объему натянутого на них параллелепипеда").

Задача 17. Векторное произведение векторов v и w ортогонально обоим этим векторам и имеет длину $|v| \cdot |w| \cdot |\sin\angle(v,w)|$.

Задача 18. Векторное произведение билинейно и кососимметрично.

Задача 19. $[v,w] = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ (определитель понимается формально, как сумма шести произведений).

Задача 20. а) Квадрат площади произвольного параллелограмма в пространстве равен сумме квадратов площадей его проекций на три координатные плоскости.
б*) Сформулируйте и докажите многомерное обобщение.

[1]Неравенство Коши позволяет определить угол между векторами евклидова пространства, так что $(u,v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u,v)$.