Плоские алгебраические кривые

Задача 0. Изобразите на плоскости множество точек
а) $x^2 - y^2 = c$; б) $2x^2 + y^2 + y = c$; в) $y^2 = x^3 + px + q$.

▷ **Определение 1.** Кривая на плоскости (аффинной или проективной), задаваемая уравнением[1] степени d называется *плоской алгебраической кривой* степени d. Кривая степени 2 называется *квадрикой*, степени 3 — *кубикой.*

(Отметим, что на эти уравнения не накладывается никаких условий. В частности, мы считаем пару прямых квадрикой, а тройку прямых кубикой.)

Задача 1. По скольким точкам могут пересекаться кривая степени n и прямая на
а) вещественной аффинной плоскости; б) комплексной аффинной плоскости;
в) комплексной проективной плоскости?

Задача 2*. Как на комплексной проективной плоскости пересекаются окружность и бесконечно удаленная прямая?

Задача 3. В кольце а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $K[x, y]$ выполнена основная теорема арифметики.
Указание. 1. В кольце многочленов над полем а) $\mathbb{Q}$; б) $K(x)$ она уж заведомо выполнена. 2. Произведение *примитивных* (с НОДом коэффициентов, равным 1) многочленов примитивно.

Задача 4. Если алгебраическая кривая содержит прямую, то ее уравнение делится на уравнение этой прямой.

Задача 5. Если O — рациональная точка невырожденной квадрики с рациональными коэффициентами[2], то ее точка P рациональна тогда и только тогда, когда прямая OP имеет рациональный угол наклона.

Задача 6. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 + y^2 = z^2$; б) $x^2 + 2y^2 = 3z^2$.

Задача 7. Если невырожденная квадрика над полем из q элементов содержит точки, то она содержит ровно $q + 1$ точку проективной плоскости.

Задача 8. Если многочлены P и Q взаимно просты, то кривые $P = 0$ и $Q = 0$ имеют конечное число общих точек.

Задача 9. Можно ли одну ветвь гиперболы задать полиномиальным уравнением?

Задача 10. Может ли плоская кривая совпадать со всей плоскостью? не иметь точек?

▷ **Теорема Безу.** Кривые степеней d_1 и d_2, задаваемые взаимно простыми многочленами, имеют не более $d_1 d_2$ общих точек.

Задача 11. а) Если две квадрики пересекаются по двум точкам прямой, то существует их линейная комбинация, содержащая эту прямую.
б) Совокупность (уравнений) квадрик, проходящих через данные 4 точки, образует векторное пространство.
в) Если точки находятся в общем положении, размерность этого пространства равна 2.
Указание. Какими квадриками оно порождено?

[1] В проективном случае это уравнение должно быть однородным.
[2] Выяснить, есть ли на данной квадрике рациональные точки, позволяет *теорема Лежандра* (узнать о которой можно из одноименного листка).

Задача 12. а) Через 5 точек общего положения проходит ровно одна квадрика.
б) Теорема Безу выполняется для пары квадрик.

Задача 13. Чему равна размерность пространства всех (уравнений) кубик? всех кубик, проходящих через данную точку?

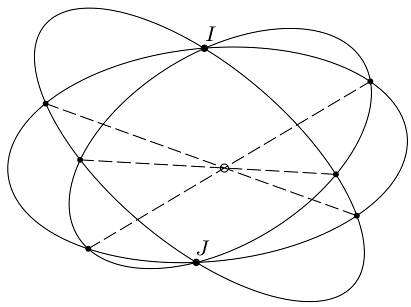
▷ **Теорема Шаля.** Если две кубики в $\mathbb{C}P^2$ пересекаются по 9 точкам, а третья кубика проходит через 8 из этих точек, то она проходит и через девятую.

В частности, если на плоскости проведено 3 черные и 3 красные прямые общего положения, то кубика, проходящая через 8 из 9 точек пересечения разноцветных прямых, проходит и через девятую.

Задача 14. Выведите из (частного случая) теоремы Шаля а) теорему Паппа; б) теорему Паскаля.

Задача 15. а) Если две кубики пересекаются по 3 точкам прямой, то существует их линейная комбинация, содержащая эту прямую.
б) Если на плоскости проведено 3 черные и 3 красные прямые общего положения, то пространство уравнений всех кубик, проходящих через (данные) 8 из точек пересечения разноцветных прямых, двумерно (в частности, в этом случае верна теорема Шаля).

Задача 16. Пусть три коники все проходят через пару точек. Тогда любые две из них пересекаются еще по двум точкам — проведем через них по прямой. Докажите, что эти 3 прямые пересекаются в одной точке ("теорема о трех кониках").



Задача 17. Будем называть стороны восьмиугольника *почти противоположными*, если с одной стороны между ними лежит 1 вершина, а с другой — 3 вершины. Докажите, что точки попарных пересечений почти противоположных сторон вписанного в квадрику восьмиугольника сами лежат на квадрике ("мистическая октограмма").