Элементы комплексного анализа

▷ **Определение 1.** Пусть f — отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Если в окрестности точки x_0 для некоторого линейного отображения $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ верно, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

то говорят, что функция f (вещественно) *дифференцируема* в точке x_0. Линейное отображение A называется *дифференциалом* функции f.

▷ **Определение 2.** Пусть f — отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Если в окрестности точки z_0 для некоторого комплексного числа a верно, что

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + o(z - z_0),$$

то говорят, что функция f *комплексно дифференцируема* в точке z_0 и пишут $f'(z_0) = a$.

Функция называется *голоморфной* на некотором открытом множестве, если она комплексно дифференцируема в каждой его точке; говорят, что функция *голоморфна в точке*, если она голоморфна в некоторой окрестности этой точки.

Задача 1. Найдите (комплексные) производные (если они есть) следующих функций
а) z; б) $\bar{z}$; в) $\operatorname{Re} z + 2i \operatorname{Im} z$; г) z^n; д) $\dfrac{1}{1+z}$; е) $\dfrac{1}{\bar{z}}$; ж) $|z|$; з) $\dfrac{|z|^2}{\bar{z}}$; и) $\sqrt{z}$; к) $\operatorname{Arg} z$.

Задача 2. Какие из аффинных преобразований голоморфны?

Задача 3. Если функция имеет ненулевую комплексную производную в точке, то она сохраняет углы между кривыми в этой точке ("является конформным отображением"; ср., например, с сохранением углов при инверсии).

Задача 4. Вещественно-дифференцируемая функция $x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$ комплексно дифференцируема тогда и только тогда, когда выполнены *условия Коши–Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

▷ **Определение 3.** Положим $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Задача 5. а) Как операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ действуют на z^n и $\bar{z}^n$?

б) Вещественно-дифференцирумая функция f комплексно дифференцируема, тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$; в этом случае ее (комплексная) производная равна $\dfrac{\partial}{\partial z} f$.

в) Функция $x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$, где u и v — (вещественные) многочлены, голоморфна тогда и только тогда, когда может быть представлена в виде $z \mapsto P(z)$ для некоторого (уже комплексного) многочлена P.

▷ Аналогично определению интеграла Римана вещественной функции по отрезку можно определить интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ комплексной функции по кривой как предел интегральных сумм вида $f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})$.

Задача 6. Вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=r} z^n\,dz$ (для всех целых n; обход совершается против часовой стрелки).

Задача 7. а) Если $f(z) = az + b$, то интеграл $\int f(z)\,dz$ по границе любого треугольника равен нулю.
б*) Пусть функция f голоморфна внутри области Ω, ограниченной гладкой кривой $\partial\Omega$, и непрерывна на $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0.$$

(Последним утверждением можно далее пользоваться без доказательства.)
в) Интеграл голоморфной функции не меняется при деформации контура.

▷ **Определение 4.** Пусть функция f голоморфна в *проколотой* окрестности точки z_0. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} f(z)\,dz =: \mathrm{res}_{z_0} f(z)\,dz$$

($\partial U(z_0)$ — маленькая кривая, обходящая один раз вокруг точки z_0; в силу предыдущей задачи от выбора конкретной кривой интеграл не зависит) называется *вычетом* в точке z_0.

Задача 8. а) Найдите вычет в нуле функции $P(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$.
б*) Для аналитических функций определение вычета выше согласовано с определением (формального) вычета из листка «Формальные ряды II».

Задача 9. а) Индекс особой точки векторного поля, задаваемого голоморфной функцией f, равен вычету $\mathrm{dlog}\, f := \frac{f'}{f}\,dz$ в этой точке.
б*) Как обобщить последнее утверждение на произвольные (гладкие) векторные поля?

Задача 10. Если функция f голоморфна в точке z_0, то

$$f(z_0) = \mathrm{res}_{z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

(“интеграл Коши”).

Задача 11. а) Если две голоморфные функции равны на границе диска, то они равны и внутри диска.
б) Любую ли бесконечно гладкую функцию на границе диска можно продолжить до голоморфной функции на диске?

Задача 12. Модуль голоморфной на открытом множестве функции не имеет локальных максимумов на этом множестве (“принцип максимума”).

Задача 13. Найдите все двоякопериодические (имеющие два линейно независимых над $\mathbb{R}$ периода) голоморфные на всей плоскости функции.

Задача 14. Выведите из принципа максимума основную теорему алгебры.

Задача 15. а) Если функция f голоморфна в точке z_0, то

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

б) Любая голоморфная функция является бесконечно комплексно-дифференцирумой.

Задача 16. Голоморфная на $\mathbb{C}$ ограниченная функция постоянна (“теорема Лиувилля”).

Задача 17. Голоморфная в точке функция аналитична в некоторой окрестности этой точки. Указание. Докажите, что $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \ldots + (z - z_0)^n \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \cdots$.

Задача 18. Существует не более одного способа продолжить данную фукнцию на вещественной прямой до голоморфной функции на $\mathbb{C}$ (“аналитическое продолжение”).

Задача 19. Аналитическое продолжение экспоненты дается формулой

$$\exp(\rho + i\varphi) = e^{\rho}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Задача 20. Существует ли голоморфная в нуле функция f, такая что $f(1/n) = 2^{-n}$?