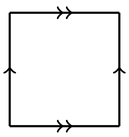
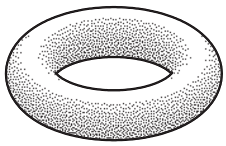
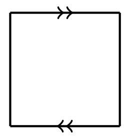
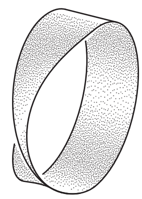
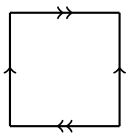
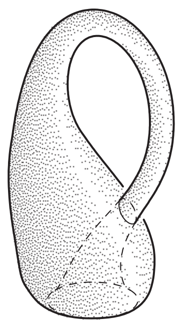
Поверхности

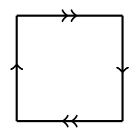
▷ **Определение 1.** *(Топологическим) многообразием* размерности n называется метризуемое пространство, локально гомеоморфное[1] $\mathbb{R}^n$ с не более чем счетным числом компонент связности. В этом листке многообразия будут интересовать нас с точностью до гомеоморфизма.

Двумерные многообразия называют *поверхностями.* Один из способов получать поверхности — клеить их (или скорее сшивать, как лоскутное одеяло) из многоугольников.

 $\longrightarrow$   $\longrightarrow$   $\longrightarrow$ 

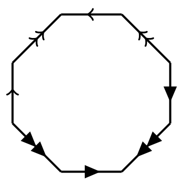
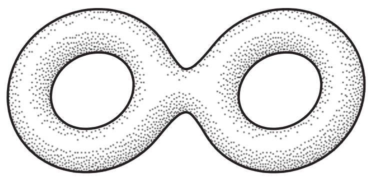
Задача 0. Следующие определения проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ эквивалентны:
- множетсво прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через ноль;
- сфера S^2 с отождествленными противоположными точками;
- диск D^2 с отождествленными противоположными точками границы.

Задача 1. а) Проективная плоскость получается попарной склейкой противоположных сторон квадрата с перекруткой (см. рис. справа).
б) Что останется, если вырезать из проективной плоскости маленький диск?



Задача 2. Отождествим в торе $S^1 \times S^1$ точки (x, y) и (y, x) ("симметрический квадрат окружности"). Что получится?

▷ **Определение 2.** *Связной суммой* поверхностей X и Y называется поверхность $X \# Y$, получающееся склейкой $X \setminus U_\varepsilon(x_0)$ и $Y \setminus U_\varepsilon(y_0)$ по граничной окружности. Взятие связной суммы с тором называется *приклеиванием ручки.*

Задача 3. а)  $\longrightarrow$  ("сфера с двумя ручками").

б) Как склеить сферу с g ручками из $4g$-угольника?

Задача 4*. Задайте сферу с ручками полиномиальным уравнением в $\mathbb{R}^3$. (Указание: сначала задайте полиномиальным уравнением в $\mathbb{R}^2$ цепочку из g окружностей.)

Задача 5. Что получится, если склеить две ленты Мёбиуса по граничной окружности?

Задача 6. $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Задача 7*. а*) Любая поверхность может быть склеена из треугольников *(этим утверждением в оставшихся пунктах можно пользоваться без доказательства).*
б) Любую поверхность[2] можно получить как $(T^2)^{\# n} \# (\mathbb{R}P^2)^{\# m}$.
в) Единственное соотношение при этом описано в предыдущей задаче.

---

[1] Т. е. такое, что у любой его точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.
[2] Считаем, что $n = m = 0$ соответствует S^2.

Задача 8. Если векторное поле на сфере с g ручками имеет конечное число особых точек, то сумма их индексов равна $2-2g$ (следствие: при $g \neq 1$ любое векторное поле на сфере с g ручками имеет особую точку).

Задача 9. Выведите из предыдущей задачи, что для любой триангуляции сферы с g ручками $V-E+F=2-2g$ (следствие: сферы с разным количеством ручек негомеоморфны).

Задача 10*. а) Существует ли отображение $\mathbb{R}P^2$ в себя без неподвижных точек?
б) Существует ли отображение $\mathbb{R}P^3$ в себя без неподвижных точек?

Задача 11*. SO_3 как топологическое пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Задача 12*. Опишите симметрический квадрат сферы S^2.

Задача 13*. Сколькими способами можно склеить сферу из $2n$-угольника? (Способы, отличающиеся только поворотом, считаются различными.)