Векторные поля II: Траектории

▷ **Определение 1.** Кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ называется *траекторией* векторного поля v, если $\dot{\gamma} = v(\gamma)$. (В частности, вне особых точек траектория касается векторного поля.)

Задача 1*. Пусть v — гладкое (непрерывно дифференцируемое) векторное поле. Тогда (i) через каждую точку проходит траектория; (ii) две траектории, имеющие общую точку, совпадают в некоторой окрестности этой точки (“теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения”)
(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)

Задача 2. Найдите все траектории и нарисуйте их эскизы для векторного поля
а) $v(x,y) = (2x, y)$; б) $v(x,y) = (x, -y)$; в) $v(x,y) = (-y, x)$; г) $v(x,y) = (x, y^2)$.

Задача 3. Может ли траектория гладкого векторного поля за конечное время а) приходить в особую точку; б) уходить на бесконечность?

Задача 4. Приведите пример непрерывного векторного поля, для которого не выполнено утверждение теоремы существования и единственности.

▷ **Определение 2.** Для гладкого векторного поля v можно рассмотреть отображение *фазового потока* (эволюции за время t) g_v^t, переводящее точку $\gamma(0)$ в точку $\gamma(t)$.

Задача 5*. Для любого t и любой точки x можно найти ее окрестность $U(x)$, на которой отображение g_v^t гладко и биективно (“теорема о зависимости от начального условия”).
(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)

Задача 6. $g^{t+s} = g^t \circ g^s$; $g^0 = \mathrm{id}$ (“g^t — однопараметрическая группа”).

Задача 7. Найдите преобразование g^t для поля а) $(2x, y)$; б) $(-y, x)$.

▷ **Определение 3.** Говорят, что точка y принадлежит *ω-предельному множеству* точки x, если в любой окрестности точки y выходящая из точки x траектория оказывается сколь угодно поздно. Обозначение: $\omega(x)$.

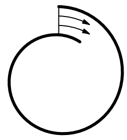
Задача 8. Существует ли такое векторное поле на плоскости, что ω-предельное множество одной из точек — две параллельные прямые?

Задача 9. а) $\bigcap\limits_N \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$ есть множество предельных точек последовательности (x_n).
б) $\omega(x) = \bigcap\limits_{T \geqslant 0} \overline{\{g^t(x) \mid t \geqslant T\}}$ (черта везде обозначает замыкание).

Задача 10. ω-предельное множество а) одинаково для точек на одной траектории; б) инвариантно (содержит траекторию каждой своей точки); в) замкнуто.

Задача 11. $\omega(\omega(x)) \subset \omega(x)$ (где $\omega(X) = \bigcup_{x \in X} \omega(x)$).

Задача 12. Для векторного поля на замкнутой поверхности (например, на сфере или торе) ω-предельное множество любой точки а) непусто; б) (топологически) связно.



Задача 13. Отмеченная на рисунке жирным траектория (“мешок Бендиксона”) не может быть ω-предельной.

Задача 14. Пусть у гладкого векторного поля на сфере число особых точек конечно.
а) Если $y \in \omega(x)$, то либо y лежит на замкнутой траектории, либо $\omega(y)$ — особая точка.
б) ω-предельное множество любой точки является либо особой точкой, либо замкнутой траекторией, либо объединением (каких-то) особых точек и соединяющих их траекторий (“теорема Пуанкаре–Бендиксона”).

Задача 15. Выведите из теоремы Пуанкаре–Бендиксона, что гладкое векторное поле на сфере имеет особую точку.

Задача 16. Может ли в ω-предельное множество точки сферы входить бесконечное число траекторий?

Задача 17. Приведите пример векторного поля на торе без особых точек, для которого ω-предельное множество одной из точек а) совпадает со всем тором; б) несчетно, но не совпадает со всем тором.