Общая топология III: Гомеоморфизмы

Задача 1. Верно ли, что при непрерывном отображении
а) образ открытого множества открыт; б) прообраз открытого множества открыт;
в) образ замкнутого множества замкнут; г) прообраз замкнутого множества замкнут;
д*) образ компактного множества компактен?

Задача 2. Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества при этом отображении открыт.

▷ **Определение 1*.** *Топологическим пространством* называется множество вместе с совокупностью его подмножеств (“топологией”), называемых *открытыми*, такой что
• пустое множество и все пространство открыты;
• произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

Метрическое пространство обладает естественной топологией. Примеры топологий на произвольном множестве X:
• *дискретная топология* (открыты все подмножества),
• *антидискретная топология* (открыты только $\varnothing$ и X),
• *кофинитная топология* (открыты $\varnothing$ и дополнения к конечным множествам).

Непрерывным отображением топологических пространств называется отображение, при котором прообраз открытого множества открыт.

Задача 3. Приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения метрических пространств, обратное к которому не является непрерывным.

▷ **Определение 2.** Непрерывное взаимно однозначное отображение, обратное к которому также непрерывно, называется *гомеоморфизмом*.

Задача 4*. Непрерывное взаимно однозначное отображение компакта — гомеоморфизм.

▷ **Определение 3.** Пространство называется *(топологически) связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Задача 5. Следующие свойства пространства X эквивалентны
1) у X нет собственных открыто-замкнутых[1] подмножеств; 2) X связно;
3) любое непрерывное отображение из X в $\{0,1\}$ постоянно.

Задача 6. Для связного пространства выполнена теорема о промежуточном значении.

Задача $6\frac{1}{2}$. Связно ли множество рациональных чисел?

▷ **Определение 4.** Пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем[2].

Задача 7. а) Отрезок связен. б) Линейно связное пространство связно.

Задача 8. а) Открытое подмножество плоскости[3] связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.
б*) Верно ли, что функция непрерывна, тогда и только тогда, когда ее график связен?
в*) Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

[1] По-английский говорят забавное слово “clopen”.
[2] Т. е. для любой пары точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $f\colon [0;1] \to X$, такое что $f(0) = a$, $f(1) = b$.
[3] Можно попробовать придумать более общую формулировку.

Задача 9. Сохраняется ли при гомеоморфизме
а) полнота; б) компактность;
в) связность; г) линейная связность;
д*) хаусдорфова размерность?

Задача 10. Гомеомеорфны ли
а) отрезок и интервал;
б) буквы «С», «Т», «О»;
в) остов тетраэдра и окружность вместе с двумя параллельными хордами;
г) отрезок и квадрат;
д*) канторово множество и его квадрат?

Задача 11*. Два графа гомеоморфны тогда и только тогда, когда один из другого можно получить последовательностью разбиений ребер (добавления на ребро вершины) и обратных операций.
(Следствие: эйлерова характеристика графа — инвариант гомеоморфизма.)

Задача 12*. Если n-мерный куб ($[0;1]^n$) гомеоморфен m-мерному, то $n = m$.

Задача 13*. а) Счетное метрическое пространство гомеоморфно подмножеству прямой.
б) Счетное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел ("теорема Серпинского").

Дополнительная часть: Топологии

Задача 14. Сколько существует различных топологий на а) 2-элементом; б) 3-элементном; в**) n-элементном множестве?

Задача 15*. Будем называть множество целых чисел открытым, если оно является объединением арифметических прогрессий.
а) Это топология на множестве целых чисел.
б) Арифметическая прогрессия в этой топологии (не только открыта, но и) замкнута[4].
в) Выведите отсюда, что простых чисел бесконечно много.
Указание. Множество $\{-1, 1\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup(p)$ не может быть открытым.

▷ **Определение 5.** Пусть A_1 и A_2 — подпространства топологического пространства X, $\phi\colon A_1 \to A_2$ — гомеоморфизм. Рассмотрим фактормножество X', получающееся из X отождествлением точек x и $\phi(x)$ ("склейкой A_1 с A_2 по отображению ϕ"). Будем называть открытыми те подмножества множества X', прообраз которых в X открыт.

Примеры: трубка (боковая поверхность цилиндра) и лента Мёбиуса — результаты двух различных склеек противоположных сторон прямоугольника; тор и бутылка Клейна — результаты двух различных склеек противоположных концов трубки.

Задача 16. а) Описанные открытые множества доставляют топологию на множестве X'.
б) Результат склейки двух копий $\mathbb{R}$ по $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не является метризуемым.
(Таким образом, даже если X было метрическим пространством, топология на X' не задается, вообще говоря, никакой метрикой).

[4] Замкнутые подмножества суть дополнения к открытым.