Векторные поля I: Индекс

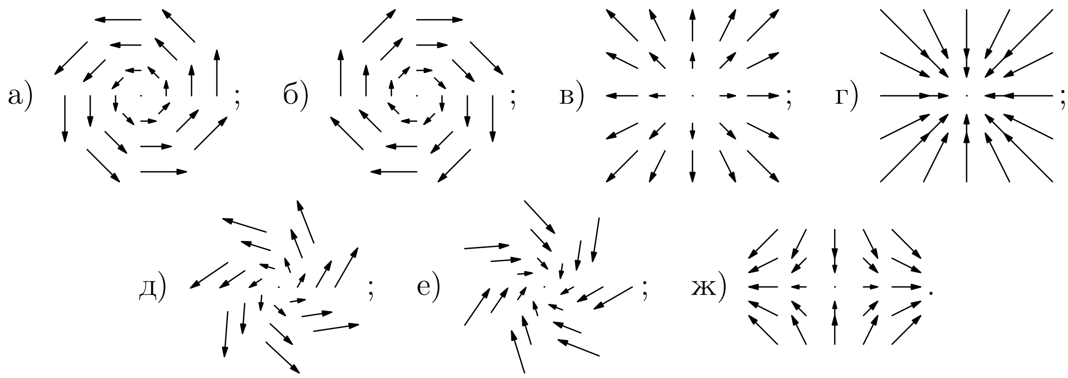
▷ **Определение 1.** Говорят, что на плоскости задано *векторное поле*, если в каждой точке (x, y) задан вектор $v(x, y)$. Мы будем рассматривать только непрерывные (как отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) векторные поля; желающие могут также считать все поля кусочно-линейными.

Точки, в которых векторное поле обращается в ноль, называются *особыми.*

Задача 1. Нарисуйте векторные поля, укажите их особые точки
а) $v(x, y) = (x, y)$; б) $v(x, y) = (-x, -y)$; в) $v(x, y) = (2x, -y)$; г) $v(x, y) = (x, y^2)$.

▷ **Определение 2 (неформальное).** *Индексом векторного поля вдоль кривой* называется число оборотов, совершаемых векторным полем при обходе[1] вдоль этой кривой.

Задача 2. Найдите индексы нарисованных векторных поле вдоль маленькой окружности с центром в начале координат.



Задача 3*. Индекс не меняется при деформации кривой, не задевающей особых точек. *(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)*

▷ **Определение 3.** В силу предыдущей задачи индекс векторного поля не зависит от выбора простой кривой, внутри которой лежит только эта особая точка. Это число назывется *индексом особой точки* векторного поля.

Задача 4. Приведите примеры[2] особых точек индекса а) 0; б) ± 2; в) $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. а) Если внутри простой кривой нет особых точек векторного поля, то индекс вдоль нее равен 0.
б) Индекс векторного поля вдоль простой кривой, внутри которой лежит конечное число особых точек, равен сумме индексов этих точек.
в*) Как правильно понимать последнее утверждение для самопересекающихся кривых?

Задача 6. Нарисуйте векторное поле, которое вне круга радиуса 1 тождественно равно $(1, 0)$, а внутри круга
а) имеет ровно 2 особые точки с индексами $+1$ и -1;
б) имеет несколько особых точек, среди них одна имеет индекс 2 и одна индекс 1;
в) имеет ровно одну особую точку.

[1] Обход совершается против часовой стрелки; обороты считаются с учетом направления. Кривая не должна проходить через особые точки векторного поля.
[2] В первых двух пунктах достаточно рисунка. В последнем пригодится еще и явная формула.

Задача 7. Непрерывное отображение круга в себя имеет неподвижную точку (“теорема Брауэра”).

Задача 8. Не существует непрерывного отображения круга на его граничную окружность, тождественного на этой окружности (“барабан нельзя смять на его обод”).

Задача 9. Будем рассматривать функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ как векторное поле. Нарисуйте соответствующие векторные поля и найдите индексы вдоль окружности $|z| = R \gg 0$ для функции а) z; б) z^2; в) $z^2 + z$; г) z^{-1}; д) z^n.

Задача 10. Дама гуляет с собачкой вокруг столба, причем в каждый момент времени расстояние от дамы до столба больше длины поводка собачки. Тогда собачка обходит столб столько же раз, сколько и дама.

Задача 11. а) Индекс векторного поля $z \mapsto P(z)$ вдоль окружности $|z| = R \gg 0$ зависит только от степени многочлена P.
б) Непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень (“основная теорема алгебры”).

▷ **Определение 4.** Говорят, что на поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле, если в каждой ее точке x задан вектор $v(x)$, *лежащий в касательной к S плоскости T_xS*.

Задача 12. Постройте векторное поле
а) на сфере с одной особой точкой;
б) на торе без особых точек; с одной особой точкой; с особыми точками индекса ± 1.

Задача 13. а) У любого векторного поля на сфере есть особая точка.
б) Сумма индексов особых точек векторного поля[3] на сфере равна 2.

Задача 14. Непрерывное отображение сферы в себя имеет либо неподвижную, либо переходящую в диаметрально противоположную точку.

[3]Любого, лишь бы этих особых точек было конечное число.