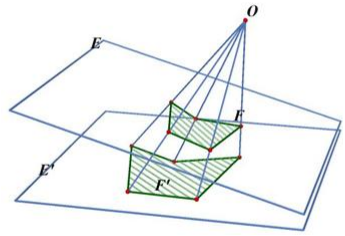
Геометрические преобразования III: Проективные преобразования

▷ **Определение 1.** Пусть α и α' — две плоскости в пространстве, не проходящие через точку O. *Центральным проектированием* называется отображение, сопоставляющее точке A плоскости α точку A' пересечения плоскости α' с прямой OA.

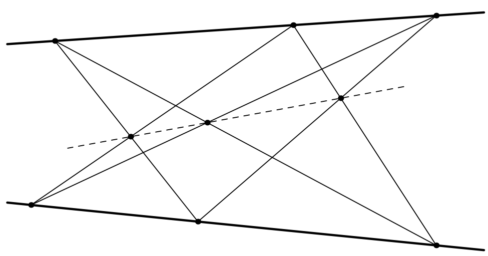


Задача 1. а) Если плоскости α и α' не параллельны, то центральное проектирование — биекция между $\alpha \setminus l$ и $\alpha' \setminus l'$, где l и l' — некоторые прямые ("исключительные прямые").
б) Точки, лежащие на одной прямой, переходят при центральном проектировании в точки, лежащие на одной прямой.
в) Прямые, пересекающиеся вне исключительной прямой переходят при центральном проектировании в пересекающиеся прямые. Прямые, пересекающиеся на исключительной прямой, переходят в параллельные прямые. Прямые, параллельные друг другу, но не исключительной прямой, переходят в прямые, пересекающиеся на исключительной прямой. Прямые, параллельные исключительной прямой, переходят в прямые, параллельные исключительной прямой.

Задача 2. Подходящим центральным проектированием можно перевести любую пару прямых в пару параллельных прямых.

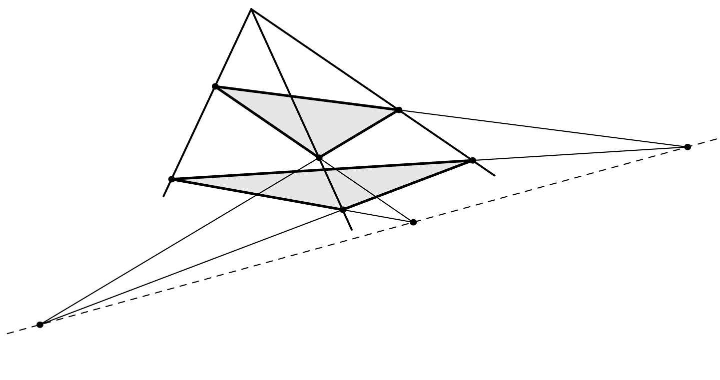
Задача 3. Пусть A, B и C — три точки на одной прямой, A', B' и C' — три точки на другой прямой.

Докажите, что точки $AB' \cap A'B$, $BC' \cap B'C$ и $CA' \cap C'A$ лежат на одной прямой ("теорема Паппа").



Задача 4. Будем говорить, что два треугольника ABC и $A'B'C'$ *перспективны относительно точки*, если прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке; будем говорить, что эти треугольники *перспективны относительно прямой*, если точки $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ и $CA \cap C'A'$ лежат на одной прямой.

Докажите, что два треугольника перспективны относительно точки тогда и только тогда, когда они перспективны относительно прямой ("теорема Дезарга").



Задача 5*. а) Центральное проектирование с прямой на прямую имеет в координатах вид $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, т. е. является *дробно-линейным преобразованием.*
б) Группа дробно-линейных преобразований прямой есть группа PGL_2 (фактор группы GL_2 обратимых матриц 2×2 по умножению на константы).
в) Любую тройку точек прямой можно перевести в любую другую тройку точек прямой ровно одним дробно-линейным преобразованием.

▷ **Определение 2.** *Проективная плоскость* — это обычная (аффинная) плоскость вместе с добавленными к ней бесконечно удаленными точками: по одной для каждого направления.

Прямая на проективной плоскости — это либо аффинная прямая вместе с соответствующей бесконечно удаленной точкой, либо совокупность всех бесконечно удаленных точек ("бесконечно удаленная прямая").

В силу задачи 1 центральное проектирование является биекцией проективных плоскостей, переводящее прямые в прямые (*коллинеацией*).

Задача 6. Через любые две точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая. Любые две прямые на проективной плоскости пересекаются ровно в одной точке.

Задача 7*. Дайте определение абстрактной проективной плоскости в духе листка 8д, так чтобы любая проективная плоскость получалась из аффинной (и наоборот).

▷ **Определение 3.** Рассматривая аффинную плоскость как плоскость $z = 1$ в трехмерном пространстве, можно отождествить
- точки проективной плоскости с проходящими через начало координат прямыми,
- прямые на проективной плоскости с проходящими через начало координат плоскостями.

Если прямая имеет вид (at, bt, ct), то говорят, что соответствующая точка проективной плоскости имеет *однородные координаты* $(a : b : c)$ (числа a, b и c не все равны нулю и определены с точностью до одновременного умножения на ненулевую константу).

Если уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz = 0$, то говорят, что соответствующая прямая на проективной плоскости имеет *однородные координаты* $(A : B : C)$.

Задача 8. а) Какие однородные координаты имеет бесконечно удаленная прямая?
б) Когда точка $(a : b : c)$ лежит на прямой $(A : B : C)$?
в) Найдите координаты прямой, проходящей через точки $(a : b : c)$ и $(a' : b' : c')$.
г) Найдите координаты точки пересечения прямых $(A : B : C)$ и $(A' : B' : C')$.

Задача 9. Запишите уравнение а) гиперболы $x^2 - y^2 = 1$; б) параболы $y = x^2$; в) окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

▷ **Определение 4.** Через GL_n обозначается группа невырожденных линейных преобразований n-мерного пространства (т. е. обратимых матриц $n \times n$).

Однородные координаты определены с точностью до умножение на константу, поэтому на точках проективной плоскости действует (заменами координат) группа PGL_3, фактор GL_3 по умножению на константы. Такие преобразования называются *проективными.*

Задача 10. а) Проективное преобразование является коллинеацией.
б) Аффинное преобразование $(x \mapsto Ax + b)$ является проективным (с какой матрицей?).
в) Центральное проектирование является проективным преобразованием.
г*) Любое проективное преобразование — композиция центральных проектирований и аффинных преобразований.

Задача 11. а) Проективным преобразованием можно перевести любую четверку точек общего положения в любую другую такую четверку...
б*) ...причем ровно одним способом.

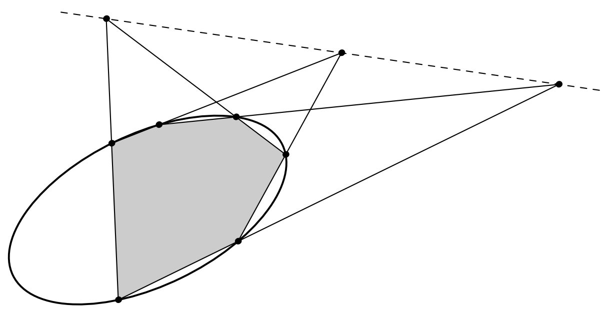
Задача 12. а) Образ кривой второй степени при проективном преобразовании — кривая второй степени.
б) Все эллипсы, параболы и гиперболы проективно эквивалентны.

Задача 13. Существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в себя и
а) переводящую данную (не пересекающую ее) прямую на бесконечность;
б) данную хорду в диаметр;
в) данную точку (внутри нее) в ее центр.

Задача 14. При помощи одной линейки нельзя а) разделить данный отрезок пополам; б) построить центр данной окружности.

Задача 15. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

Задача 16. Точки пересечения трех пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (“теорема Паскаля”).



▷ **Определение 5.** Говорят, что прямая и точка *инцидентны*, если точка лежит на прямой.

Задача 17. Если в верном утверждении о точках и прямых проективной плоскости, использующем только отношение инцидентности, поменять местами слова «точка» и «прямая», то оно останется верным (“проективная двойственность”).

Задача 18*. а) Уточните последнее утверждение: постройте отображение, переводящая точки в прямые, а прямые в точки, сохраняющее отношение инцидентности (такие отображения называются *корреляциями*).
б) Найдите множество самосопряженных (инцидентных своей двойственной прямой) точек на *комплексной* проективной плоскости.
в) Как, имея это множество точек, построить одной линейкой прямую, двойственную данной точке?

Задача 19. Какая теорема двойственна
а) теореме Дезарга; б) теореме Паскаля; в*) теореме Чевы?