# Анализ VII: Интеграл и первообразная

## Часть 1: Первообразная

▷ **Определение 1.** *Первообразной* функции $f$ называется такая функция $F$, что $F' = f$. *Множество* всех первообразных функции $f$ обозначается $\int f(x)\,dx$ (и называется *неопределенным интегралом*).

Как мы видели в предыдущем листке, одной из первообразных непрерывной на отрезке функции $f$ является функция $\int_a^x f(t)\,dt$.

**Задача 1.** Любые две первообразные функции на интервале отличаются на константу. (В частности, для непрерывной на отрезке функции $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$.)

**Задача 2.** Решите уравнения а) $f' = f$; б) $f' = a'f$;
в*) $f'' = f$; г*) $f'' = -f$; д*) $f' = f + 1$;
е*) $f' = af + b$ (здесь $a$ и $b$ — произвольные функции, в ответ может входить интеграл).

**Задача 3.** а) Существует ли интегрируемая функция на отрезке, не имеющая первообразной?
б*) Существует ли неинтегрируемая функция на отрезке, имеющая первообразную?

**Задача 4.** Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int x^n\,dx$ $(n > 0)$; б) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\,dx$; г) $\displaystyle\int |x^2 - 1|\,dx$.

**Задача 5*.** Опишите множество всех первообразных функции, определенной на произвольном открытом подмножестве прямой.

**Задача 6.** Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \sin x\,dx$, $\displaystyle\int \cos x\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$;
г) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

**Задача 7*.** Опишите алгоритм интегрирования рациональной функции (в элементарных функциях).

**Задача 8.** Скорость материальной точки зависит от времени как $\sin kt$. Какое расстояние она пройдет за время $t_0$?

**Задача 9.** Если функции $f$, $\phi$ и $\phi'$ непрерывны, то

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \Big|_{y=\phi(x)}.$$

▷ Будем обозначать $f'(x)\,dx$ символом $df$. Тогда предыдущая формула принимает вид

$$\int f(\phi)\,d\phi = \int f(y)\,dy \Big|_{y=\phi(x)}$$

("интеграл формы не меняется при заменах координат").

**Задача 10.** Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \sin(3x)\,dx$; б) $\displaystyle\int \cos^n x \sin x\,dx$; в*) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.

**Задача 11.** Если функции $u$ и $v$ непрерывны вместе с первыми производными, то

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx;$$

▷ Другими словами,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

**Задача 12.** $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx.$

**Задача 13.** Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \ln x\,dx$; б) $\displaystyle\int xe^x\,dx$; в*) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$.

**Часть 2: Вычисление интегралов**

**Задача 14.** Если $F$ — первообразная непрерывной функции $f$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(“формула Ньютона–Лейбница”; вместо $F(b) - F(a)$ используется еще сокращение $F\big|_a^b$).

**Задача 15.** а) Если функции $u$ и $v$ непрерывны вместе с первыми производными, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

б) Если функции $f$, $\phi$ и $\phi'$ непрерывны, то

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy.$$

в*) Требование непрерывности функций $f$ и $\phi'$ можно отбросить.

**Задача 16.** Вычислите
а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$; в*) $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx$.

**Задача 17.** Вычислите
а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx$.

**Задача 18.** а) Последовательность $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$ монотонна.

б) Вычислите $a_n$ (в ответе должны чередоваться рациональные числа и рациональные кратные $\pi$).

в) $\dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots} = \dfrac{\pi}{2}$ (“формула Валлиса”).

**Задача 19*.** Вычислите $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,dx$.

## Часть 3: Интегралы и суммы

**Задача 20.** Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

Указание. Представьте дробь как интегральную сумму.

**Задача 21.** $\ln n! = n\ln n - n + o(n)$ (ср. с формулой Стирлинга).

**Задача 22*.** Пусть функция $f$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[a;b]$.

а) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$ (“формула прямоугольников”).

б) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$ (“формула прямоугольников”).

в) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$ (“формула трапеций”).

г) Продолжите эту последовательность квадратурных формул.

(Везде требуется доказать существование точки $\xi\in[a;b]$, такой что выполняется равенство.)

**Задача 23*.** а) $\displaystyle\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\ln k + \frac{1}{2}\ln n + C + O(n^{-1})$;

б) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ (“формула Стирлинга”).