Перестановки: Порядок и беспорядки

▷ **Определение 1.** *Перестановкой* n элементов (или подстановкой из n элементов) называется биекция множества $\{1, \ldots, n\}$ на себя. Множество всех перестановок n элементов обозначается S_n (или $\mathfrak{S}_n$, или Σ_n).

Запись $\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую a_i в b_i. Обычно перестановки записывают в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}$.

Произведением перестановок называется их композиция как отображений (обозначение: ab). Тождественная перестановка обозначается e.

Задача 1. а) Какие перестановки вершин квадрата осуществляют его симметрии?
б*) Любую ли перестановку из $\mathfrak{S}_4$ можно так получить, занумеровав вершины квадрата подходящим образом?

Задача 2. Вычислите а) $\begin{pmatrix} 4\,1\,2\,3 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Задача 3. Верно ли, что для любых перестановок
а) $ae = a = ea$; б) $(ab)c = a(bc)$; в) $aa^{-1} = a^{-1}a = e$; г) $ab = ba$; д) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?

Задача 4*. Найдите все такие подстановки a, что $ab = ba$ для всех подстановок b.

Задача 5. Решите уравнение $ax = b$; уравнение $xa = b$.

Задача 6. Дайте определение целой степени подстановки так, чтобы выполнялись свойства $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$.

Задача 7. Вычислите а) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}^{-100}$; в) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,2\,1\,3 \end{pmatrix}^{100}$.

▷ **Определение 2.** *Порядком* перестановки a называется наименьшее натуральное число n, такое что $a^n = e$ (обозначение: $n = \operatorname{ord} a$).

Задача 8. а) Любая перестановка имеет порядок.
б) $a^n = e$ тогда и только тогда, когда n делится на $\operatorname{ord} a$.

Задача 9. Найдите порядок перестановки а) $\begin{pmatrix} 1\,2 \ldots n-1\; n \\ 2\,3 \ldots\; n \;\; 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 10*. Какой максимальный порядок может иметь перестановка из $\mathfrak{S}_8$?

▷ **Определение 3.** *Транспозицией* называется перестановка, переводящая все элементы кроме i и j в себя, а i и j меняющая местами. Обозначение: (i, j).

Задача 11. а) Разложите в произведение транспозиций перестановки из задачи 9.
б) Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций.

Задача 12*. Какое минимальное число перестановок нужно, чтобы в виде их произведения можно было записать любую перестановку из $\mathfrak{S}_n$?

▷ **Определение 4.** *Беспорядком* (или инверсией) в перестановке σ называется пара (i, j), такая что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Четность числа беспорядков называется *четностью* перестановки (обозначение: $\bar{\sigma}$).

Задача 13. Выясните, являются четными или нечетными следующие перестановки а) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,4\,3\,2\,5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1\,2\ldots & n-1 & n \\ 2\,3\ldots & n & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\, n \\ n & n-1 & \ldots\, 1 \end{pmatrix}$.

Задача 14. а) Как меняется четность перестановки при умножении на транспозицию? б) Как связана четность произведения перестановок с четностью сомножителей?

Задача 15. Сколько в $\mathfrak{S}_n$ четных перестановок?

Задача 16. а) Если в игре «пятнашки» поменять местами фишки с номерами «14» и «15», то, играя в эту игру, невозможно получить правильное расположение фишек.
б*) Опишите все позиции, из которых правильное расположение фишек получить можно.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Задача 17*. Существует ровно два отображения из перестановок в числа, таких что $f(e) = 1$ и $f(ab) = f(a)f(b)$. А именно, $f(\sigma) = 1$ и $f(\sigma) = (-1)^{\bar{\sigma}}$.

Задача 18*. Каждому из N мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: одну черную и одну белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После чего их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки.

Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая черная — за черную? (Мудрец видит все числа, кроме своего.)