Общая топология II: Метрические пространства, полнота, компактность

Часть 1: Метрические пространства

▷ **Определение 1.** *Метрическим пространством* называется множество M вместе с функцией $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ (называемой *метрикой* или *расстоянием*), удовлетворяющей следующим требованиям:
1) $d(x,y) \geq 0$ (неотрицательность);
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (разделение точек);
3) $d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность);
4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (неравенство треугольника).

Первые примеры метрических пространств:
• $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$; $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$;
• X произвольное, $d(x,y) = 1$, если $x \neq y$, и $d(x,x) = 0$ (*"дискретная топология"*).

Любое подмножество метрического пространства имеет естественную структуру метрического пространства.

Задача 1. Следующие пары (X,d) являются метрическими пространствами:
а) $X = C[a;b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, $d(f,g) = \max|f(x) - g(x)|$ (sup-*метрика* или *равномерная метрика) на функциях*;
б) $X = l_\infty$ — множество ограниченных последовательностей, $d\big((a_n),(b_n)\big) = \sup|a_n - b_n|$ (sup-*метрика) на последовательностях*;
в*) $X = \mathbb{Z}$, $d(m,n) = p^{-\alpha}$, где p^α — наибольшая степень числа p, на которую делится $m-n$ (при $m = n$ полагаем $d(m,n) = 0$) *(p-адическая метрика)*;
г*) $X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |y_1 - y_2|$, если $x_1 = x_2$ и $|y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|$, если $x_1 \neq x_2$ *(джунгли Амазонки)*.

Задача 2. Положим $\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$. При каких p функция $d_p\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|_p$ является метрикой на $\mathbb{R}^2$? (Начать можно с $p = 1, 2, 1/2, \infty$.)

▷ **Определение 2.** *Открытым* (соответственно, замкнутым) *шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке a называется множество $U_r(X) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$ (соответственно, $\{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$). Открытый шар радиуса ε с центром в точке a называют также ε-*окрестностью* этой точки.

Задача 3. Нарисуйте замкнутые шары в метриках d_p на $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. а) Сформулируйте определение предела последовательности элементов метрического пространства.
б) Сформулируйте два определения непрерывного отображения метрических пространств («по Коши» и «по Гейне») и докажите их эквивалентность.

▷ **Определение 3.** Подмножество метрического пространства называется *открытым*, если каждую свою точку оно содержит вместе с некоторой окрестностью.

Подмножество метрического пространства называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 5. а) Подмножество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к нему открыто.
б) Конечное объединение и произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто.
в) Произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

Часть 2: Полнота

▷ **Определение 4.** Последовательность (x_n) точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если расстояние между ее членами стремится к нулю, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall k, l > N \; d(x_k, x_l) < \varepsilon.$$

Задача 6. Сходящаяся последовательность фундаментальна. (Верно ли обратное?)

▷ **Определение 5.** Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Задача 7. Какие из следующих метрических пространств полны:
а) интервал, отрезок, прямая, (стандартное) канторово множество;
б) непрерывные функции, многочлены, ступенчатые функции (с равномерной метрикой на отрезке)?

Задача 8. а) Замкнутое подпространство полного пространства полно.
б) Полное подпространство произвольного пространства замкнуто.

Задача 9. В полном метрическом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимся к нулю радиусом имеет общий элемент.

Задача 10. Существенно ли в предыдущей задаче условие а) полноты; б*) стремления радиуса к нулю?

▷ **Определение 6.** Отображение T метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists c < 1 : \forall x, y \; d(T(x), T(y)) \leqslant c d(x, y).$$

Задача 11. а) Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет ровно одну неподвижную точку.
б) Останется ли утверждение верным, если ослабить требование на отображение T до $\forall x \neq y \; d(T(x), T(y)) < d(x, y)$?

Задача 12. На карту России масштаба $1 : 5\,000\,000$ положили карту России масштаба $1 : 20\,000\,000$. Докажите, что найдется точка, изображения которой на обеих картах совпадут.

Задача 13. Пусть f — *равномерно* непрерывная функция из подмножества Q метрического пространства X в полное метрическое пространство Y. Тогда непрерывное продолжение этой функции на замыкание[1] Q существует и единственно.

$$\begin{tikzcd} \bar{Q} \arrow[dr, dashed] & \\ Q \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Задача 14. Функция 2^x может быть продолжена с рациональных чисел на все вещественные.

[1] Напомним, что замыкание множества Q — это минимальное замкнутое множество, содержащее множество Q. Его можно получить, добавив к множеству Q все его предельные точки.

▷ **Определение 7.** Функция на отрезке $[a;b]$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение этого отрезка, что на каждом из интервалов разбиения эта функция постоянна.

Задача 15. а) Замыкание пространства ступенчатых функций на отрезке $[a;b]$ (в sup-метрике) содержит все непрерывные на этом отрезке функции.
б*) Опишите это замыкание. (Какие точки разрыва могут иметь соответствующие функции?)

Задача 16*. Определенным интегралом ступенчатой функции, равной c_i на интервале $(x_i;x_{i+1})$, называется число $\sum c_i(x_{i+1}-x_i)$.
а) Существует и единственно продолжение функционала $\int_a^b (-)\,dx$ с пространства ступенчатых функций на его замыкание в sup-метрике ("интеграл Коши").
б) Интеграл Коши линеен, аддитивен, сохраняет нестрогие неравенства.
в) Любая непрерывная функция интегрируема по Коши, причем выполняется теорема о среднем.
г) Может ли функция быть интегрируема по Риману, но не по Коши? по Коши, но не по Риману? интегрируема и по Коши, и по Риману, но с разными результатами?

▷ **Определение 8.** Подмножество метрического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством; *нигде не плотным*, если его замыкание не имеет внутренних точек.

Задача 17. а) Объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно.
б) Верно ли, что дополнение к всюду плотному множеству нигде не плотно? Верно ли, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно?

Задача 18 (теорема Бэра). Будем называть *тощим* (meagre) не более чем счетное объединение нигде не плотных подмножеств полного метрического пространства.

Докажите, что в полном метрическом пространстве дополнение к тощему множеству всюду плотно (в частности, непусто).

Задача 19. Множество а) не монотонных ни на каком интервале; б) не дифференцируемых ни в одной точке функций всюду плотно в пространстве непрерывных функций на отрезке с равномерной метрикой.

Часть 3: Компактность

▷ **Определение 9.** *Открытым покрытием* метрического пространства называется набор его открытых подмножеств, такой что каждая из точек пространства лежит хотя бы в одном из этих множеств.

Пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 20. Отрезок компактен.

Задача 21. а) Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.
б) Компактное подпространство произвольного пространства замкнуто.
в) Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Задача 22. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

▷ **Определение 10.** Пространство называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

▷ **Определение 11.** Подмножество метрического пространства называется *ε-сетью*, если любая точка пространства удалена от этого множества менее, чем на ε.

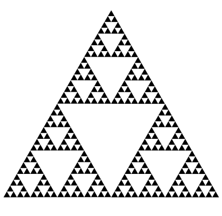
Задача 23+29. Следующие свойства метрического пространства X эквивалентны:
• X компактно;
• X секвенциально компактно;
• X полно и имеет конечную ε-сеть для любого положительного ε.

Задача 23$\frac{1}{2}$*. Следующие свойства метрического пространства X эквивалентны:
• в X есть счетное всюду плотное подмножество (“X *сепарабельно*”);
• любое семейство непересекающихся открытых подмножеств X не более чем счетно;
• из любого открытого покрытия X можно выделить счетное подпокрытие.

Задача 24. Непрерывная функция на компакте а) ограничена; б) равномерно непрерывна.

Задача 25*. Множество непрерывных отображений из компактного пространства в полное пространство с sup-метрикой — полное метрическое пространство.

Задача 26*. а) Если $d(a,X) := \inf\limits_{x\in X} d(a,X) = 0$ и множество X замкнуто, то $a \in X$.
б) Функция $d_H(X,Y) = \max\bigl(\sup\limits_{x\in X} d(x,Y), \sup\limits_{y\in Y} d(X,y)\bigr)$ — метрика на множестве $K(M)$ всех компактных подмножеств метрического пространства M (“метрика Хаусдорфа”).
в) Если M полно, то и $K(M)$ полно (“теорема Бляшке”).
г) Пусть $T_1,\ldots,T_n$ — сжимающие отображения полного пространства M. Тогда существует и единственен компакт K, такой что $K = T_1(K)\cup\ldots\cup T_n(K)$.



Задача $26\frac{1}{2}$*. Компактное метрическое пространство либо не более чем счетно, либо имеет мощность континуум.

Задача 27*. Любое компактное метрическое пространство является непрерывным образом канторовского множества.

Задача 28*. Любое счетное метрическое пространство вкладывается в канторовское множество.

Дополнительная часть: Размерность по Хаусдорфу

▷ **Определение 12.** Определим *d-меру Хаусдорфа* компактного метрического пространтсва как нижний предел суммы d-х степеней диаметров покрывающих его множеств по максимальному диаметру элемента покрытия:

$$M_d(X) = \lim_{\delta \to 0} \inf \Big\{ \sum_i \delta(U_i)^d \mid \bigcup U_i = X,\ \delta(U_i) \leqslant \delta \Big\}.$$

Задача 30. $M_d([a;b]) = \begin{cases} 0, & d > 1; \\ b - a, & d = 1; \\ \infty, & d < 1. \end{cases}$

▷ **Определение 13.** *Размерностью Хаусдорфа* компактного метрического пространства называется точная нижняя грань чисел d, при которых его d-мера конечна.

Задача 31. Размерность Хаусдорфа равна $\lim \log_n N_{1/n}(X)$, где $N_\varepsilon(X)$ — размер наименьшей ε-сети.

Задача 32. Найдите размерность Хаусдорфа а) квадрата, куба; б) (стандартного) канторова множества; в) ковра Серпинского (множества с картинки на предыдущей странице).

Задача 33. Множество разбивается на n частей, подобных исходному множеству с коэффициентом λ. Чему равняется его размерность Хаусдорфа?