Листок 29д | сентябрь 2013

Общая топология II: Метрические пространства, полнота, компактность

(сокращенная версия)

Часть 1: Метрические пространства

▷ **Определение 1.** *Метрическим пространством* называется множество M вместе с функцией $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ (называемой *метрикой* или *расстоянием*), удовлетворяющей следующим требованиям:
1) $d(x, y) \geqslant 0$ (неотрицательность);
2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (разделение точек);
3) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);
4) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ (неравенство треугольника).

Первые примеры метрических пространств:
• $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$; $\quad X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$;
• X произвольное, $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$ (*“дискретная топология”*).

Любое подмножество метрического пространства имеет естественную структуру метрического пространства.

▷ **Определение 2.** *Открытым* (соответственно, замкнутым) *шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке a называется множество $U_r(X) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$ (соответственно, $\{x \in M \mid d(x, a) \leqslant r\}$). Открытый шар радиуса ε с центром в точке a называют также *ε-окрестностью* этой точки.

Задача 4. а) Сформулируйте определение предела последовательности элементов метрического пространства.
б) Сформулируйте два определения непрерывного отображения метрических пространств («по Коши» и «по Гейне») и докажите их эквивалентность.

▷ **Определение 3.** Подмножество метрического пространства называется *открытым*, если каждую свою точку оно содержит вместе с некоторой окрестностью.

Подмножество метрического пространства называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 5. а) Подмножество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к нему открыто.
б) Конечное объединение и произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто.
в) Произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

Задача $5\frac{1}{2}$. Следующие определения *замыкания* подмножества Q метрического пространства X эквивалентны
• наименьшее по включению замкнутое подмножество, содержащее Q;
• пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Q;
• совокупность всех пределов последовательностей из Q.

Часть 2: Полнота

▷ **Определение 4.** Последовательность (x_n) точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если расстояние между ее членами стремится к нулю, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall k, l > N\ d(x_k, x_l) < \varepsilon.$$

Задача 6. Сходящаяся последовательность фундаментальна. (Верно ли обратное?)

▷ **Определение 5.** Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Задача 7. Какие из следующих метрических пространств полны:
а) интервал, отрезок, прямая, (стандартное) канторово множество;
б) непрерывные функции, многочлены, ступенчатые функции (с равномерной метрикой на отрезке)?

Задача 8. а) Замкнутое подпространство полного пространства полно.
б) Полное подпространство произвольного пространства замкнуто.

Задача 9. В полном метрическом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимся к нулю радиусом имеет общий элемент.

Задача 10. Существенно ли в предыдущей задаче условие а) полноты; б*) стремления радиуса к нулю?

▷ **Определение 6.** Отображение T метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists c < 1 : \forall x, y\ d(T(x), T(y)) \leqslant c d(x, y).$$

Задача 11. а) Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет ровно одну неподвижную точку.
б) Останется ли утверждение верным, если ослабить требование на отображение T до $\forall x \neq y\ d(T(x), T(y)) < d(x, y)$?

Задача 12. На карту России масштаба $1 : 5\,000\,000$ положили карту России масштаба $1 : 20\,000\,000$. Докажите, что найдется точка, изображения которой на обеих картах совпадут.

$$\begin{tikzcd} \bar{Q} \arrow[dr, dashed] & \\ Q \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Задача 13. Пусть f — *равномерно* непрерывная функция из подмножества Q метрического пространства X в полное метрическое пространство Y. Тогда непрерывное продолжение этой функции на замыкание[1] Q существует и единственно.

Задача 14. Функция 2^x может быть продолжена с $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$.

[1] Напомним, что замыкание множества Q — это минимальное замкнутое множество, содержащее множество Q. Его можно получить, добавив к множеству Q все его предельные точки.

Часть 3: Компактность

▷ **Определение 9.** *Открытым покрытием* метрического пространства называется набор его открытых подмножеств, такой что каждая из точек пространства лежит хотя бы в одном из этих множеств.

Пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 20. Отрезок компактен.

Задача 21. а) Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.
б) Компактное подпространство произвольного пространства замкнуто.
в) Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Задача 22. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

▷ **Определение 10.** Пространство называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

▷ **Определение 11.** Подмножество метрического пространства называется *ε-сетью*, если любая точка пространства удалена от этого множества менее, чем на ε.

Задача 23. Следующие свойства метрического пространства X эквивалентны:
- X компактно;
- X секвенциально компактно;
- X полно и имеет конечную ε-сеть для любого положительного ε.

Задача 24. Непрерывная функция на компакте а) ограничена; б) равномерно непрерывна.