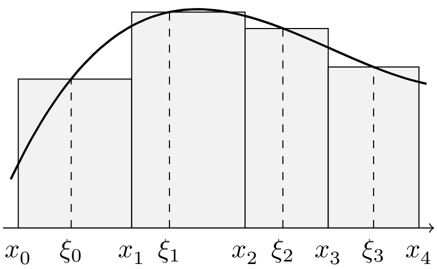
Анализ VI: Определенный интеграл



▷ **Определение 1.** *Разбиением* отрезка $[a;b]$ называется набор чисел $x_0,\ldots,x_n$, такой что $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. *Диаметром* этого разбиения называется максимум из разностей x_i-x_{i-1}.

Интегральной суммой функции f на отрезке $[a;b]$ для разбиения $x_0,\ldots,x_n$ *с отмеченными точками* $\xi_{i-1}\in[x_{i-1};x_i]$ называется число $\sum_i f(\xi_{i-1})(x_i-x_{i-1})$.

Задача 1. Вычислите интегральную сумму для разбиения отрезка $[0;1]$ на n равных частей с правыми концами в качестве отмеченных точек для функции
а) $f(x)=C$; б) $f(x)=x$; в) $f(x)=x^2$.

▷ **Определение 2.** *Определенным интегралом Римана* функции f на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм f на этом отрезке при диаметре разбиения стремящемся к нулю. Если этот предел существует, f называется *интегрируемой по Риману.*
(Подробнее: $\int\limits_a^b f(x)\,dx=C$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$ с диаметром, меньшим δ, и любого выбора отмеченных точек интегральная сумма отличается от C не более чем на ε.)

Задача 2. а) Интеграл $\int\limits_0^x (t+c)\,dt$ равен площади под графиком. б) Вычислите $\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

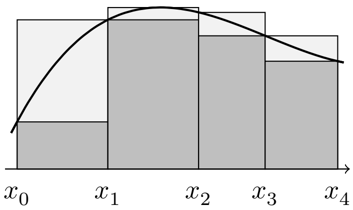
Задача 3*. а) Если прямая $x=t$ пересекает многоугольник M по отрезку длины $f(t)$, то площадь этого многоугольника равна интегралу $\int f(t)\,dt$.
б) Пусть на плоскости имеются два многоугольника, и пусть проведены все прямые, параллельные данной. Тогда если каждая из прямых пересекает эти многоугольники по равным отрезкам, то площади многоугольников равны (“принцип Кавальери”).

Задача 4. а) Отображение $f\mapsto\int\limits_a^b f(x)\,dx$ линейно. б) $\int\limits_a^c f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_b^c f(x)\,dx$.

Задача 5. Если $f\leqslant g$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 6. а) Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $\xi\in[a;b]$, такая что $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (“теорема о среднем”).
б) Если функция f непрерывна, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ является ее *первообразной*, т. е. $F'=f$.

Задача 7. а) Интегрируемая на отрезке функция ограничена. б) Верно ли обратное?



▷ **Определение 3.** Пусть τ — разбиение отрезка $[a;b]$, $M_i=\sup_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi)$, $m_i=\inf_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi)$. Числа $S_\tau(f)=\sum_i M_i(x_i-x_{i-1})$ и $s_\tau(f)=\sum_i m_i(x_i-x_{i-1})$ называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами Дарбу* функции f на отрезке $[a;b]$.

Задача 8. Вычислите верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для разбиения отрезка $[0;1]$ на n равных частей а) для линейной функции; б) для функции Дирихле.

Задача 9. а) При добавлении к разбиению новой точки $s(f)$ не уменьшается, а $S(f)$ — не увеличивается.
б) Никакая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит никакой верхней суммы Дарбу функции f.
в) Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, если и только если $\sup s_\tau(f) = \inf S_\tau(f)$ (sup и inf берутся по множеству разбиений отрезка $[a;b]$).

▷ **Определение 4.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in M\ f(U_\delta(x) \cap M) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Задача 10. а) Равномерно непрерывная на M функция непрерывна во всех точках M.
б) Непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.
в) Любая ли непрерывная функция на интервале равномерно непрерывна?

Задача 11. а) Непрерывная; б) разрывная в конечном числе точек отрезка ограниченная функция интегрируема.

Задача 12. Монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке.

Задача 13*. а) Ограниченная функция, имеющая не более чем счетное число точек разрыва на отрезке, интегрируема на этом отрезке.
б) Интегрируема ли на отрезке функция Римана?
в*) Каким может быть множество точек разрыва интегрируемой по Риману функции? Какие функции интегрируемы по Риману?

Задача 14*. Пусть последовательность (f_n) интегрируемых на отрезке по Риману функций сходится а) поточечно; б) равномерно[1] к функции f. Можно ли утверждать, что функция f также интегрируема и $\displaystyle\int f(x)\,dx = \lim \int f_n(x)\,dx$?

[1]Определение равномерной сходимости можно найти в листке «Непрерывные функции».