Гамма-функция

Задача 1. Для целых z имеет место равенство
$$\binom{N+z}{N} = N^z\left(\frac{1}{z!}+o(1)\right) \qquad (N\to\infty,\ N\in\mathbb{N}),$$
или, что то же самое,
$$z! = \lim_{N\to\infty}\frac{N^z}{\binom{N+z}{N}}.$$

▷ Следуя Эйлеру, будем воспринимать формулу выше как определение $z!$ для произвольных (вещественных или даже комплексных) z.

Задача 2. $(z+1)! = (z+1)\cdot z!$.

Задача 3. $z! = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N^z}{\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{z}{n})}$.

Задача 4. а) Существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}-\ln N\right) =: \gamma$; б) $z! = \exp(-\gamma z)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\exp(\frac{z}{n})}{1+\frac{z}{n}}$.

▷ **Определение 1.** *Логарифмической производной* функции f называется функция $\frac{f'}{f}$. Логарифмическое дифференцирование будем обозначать символом dlog.

Ясно, что для положительных функций $\operatorname{dlog} f = (\ln f)'$.

Задача 5. $\operatorname{dlog}(fg) = \operatorname{dlog} f + \operatorname{dlog} g$.

Задача 6. а) $\xi(z) := \operatorname{dlog}(z!) = -\gamma + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right)$; б) $\xi(-z)-\xi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z - \dfrac{1}{z}$.

Задача 7. а) $\sin\pi z = \pi z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$; б) $(-z)!z! = \dfrac{\pi z}{\sin\pi z}$.

Задача 8. Вычислите $\frac{1}{2}!$ и докажите *формулу Валлиса*, $\dfrac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots} = \dfrac{\pi}{2}$.

▷ **Определение 2.** $\Gamma(z) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ $(z>0)$; $\psi(z) := \operatorname{dlog}\Gamma(z)$.

Несобственный интеграл вида $\int_a^\infty$ следует понимать как предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b$ обычных интегралов.

Задача 9. а) Вычислите $\Gamma(0)$, $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$; б) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Задача 10*. $\psi(z+1) = \ln z + o(1)$ *(можно далее пользоваться без доказательства).*

Задача 11. а) $\psi(z+1) = \dfrac{1}{z}+\psi(z)$; б) $\psi(1) = -\gamma$; в) $\psi(z) = -\gamma+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+z}\right)$.

Задача 12. $\Gamma(z+1) = z!$ (при $z>0$); $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$.

Задача 13. $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}n!\zeta(n+1)$.

▷ Можно показать, что Г-функция аналитична. Поэтому последняя задача дает разложение в ряд Тейлора (сходящийся при $|z|<1$):
$$\ln z! = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}(-z)^n.$$

Задача 14*. Положим $B(s,t) := \displaystyle\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$. Тогда $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.