Анализ V: Применения производной

Задача 1. а) Найдите промежутки возрастания и убывания, локальные экстремумы функции x^3+px+q, постройте эскиз ее графика.
б) Сколько вещественных корней имеет уравнение $x^3+px+q=0$?
в*) Сколько вещественных корней имеет уравнения $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$?
г) Сколько вещественных корней имеет уравнение $x^5-5x+a=0$?

Задача 2. Многочлен P имеет в точке x_0 кратный корень тогда и только тогда, когда $P'(x_0)=P(x_0)=0$. (Решив эту задачу, можно вернуться к задаче 8 листка «Многочлены II».)

Задача 3. Сколько касательных из точки (x_0,y_0) можно провести а) к параболе $y=x^2$; б) к кубической параболе $y=x^3-x$?

Задача 4. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, впишите прямоугольник наибольшей площади.

Задача 5. Перпендикулярно к реке шириной a построен канал шириной b. Какой максимальной длины суда смогут заходить в этот канал? Ширину судна считать нулевой.

Задача 6*. а) Если $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, то в окрестности нуля $f(x)=o(x^2)$.
б) Если функция f дважды дифференцируема в точке[1] x_0, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2.$$

в) Пусть функция f такова, что в окрестности точки x_0

$$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+b(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2.$$

Можно ли утверждать, что функция f дважды дифференцируема в этой точке?

Задача 7. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0)=0$. Если в точке x_0
а) функция f' меняет знак; б) функция f дважды дифференцируема и $f''(x_0)\neq 0$,
то в этой точке имеется локальный экстремум.

▷ **Определение 1.** Функция называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*), если ее график проходит под любой своей хордой[2], и *выпуклой вверх* (или *вогнутой*), если ее график проходит над любой своей хордой.

Другими словами, функция f называется (строго) выпуклой, если

$$\forall \alpha_1,\alpha_2>0:\alpha_1+\alpha_2=1\ \ f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)<\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

Задача 8. Если функция f выпукла, то для любой случайной величины ξ имеет место *неравенство Йенсена*, $f(E\xi)\leqslant E[f(\xi)]$.

Задача 9. а) Если функция f выпукла и дважды дифференцируема на некотором интервале, то функция f'' неотрицательна на этом интервале.
б) Если на некотором интервале функция f'' строго положительна, то функция f строго выпукла на этом интервале.

Задача 10. Убедитесь, что функция а) x^n $(n>1)$; б) $\ln x$; в) $x\ln x$ строго выпукла, и выясните, какое классическое неравенство дает для нее неравенство Йенсена.

---
[1] В частности, первая производная функции f существует в некоторой окрестности точки x_0.
[2] Таким образом, функция f выпукла тогда и только тогда, когда выпукло множество $\{(x,y):y\geqslant f(x)\}$.

▷ **Определение 2.** Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и расстояние до касательной $(f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)])$ меняет в этой точке знак.

Задача 11. Если функция f дважды дифференцируема в своей точке перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$.

▷ **Определение 3.** *Асимптотой* графика функции называется такая прямая $\{x_0 + vt\}$, что при $t \to +\infty$ расстояние от соответствующей точки прямой до графика стремится к нулю.

Задача 12. а) Пусть функция f дифференцируема на всей прямой и $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a$. Можно ли утверждать, что у графика этой функции есть асимптота вида $y = ax + b$?
б) Пусть функция f дифференцируема на всей прямой, а ее график имеет асимптоту $y = ax + b$ при $x \to +\infty$. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$?

Задача 13. Проведите полное исследование (область определения; области возрастания и убывания, минимумы и максимумы, область значений; асимптоты; области вогнутости и выпуклости, точки перегиба) и постройте эскизы графиков следующих функций
а) $\frac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $x\sqrt[3]{x-1}$; в) $\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; г) x^x.

Задача 14. При каких x уравнение $x^y = y^x$ имеет решения, отличные от $y = x$? Сколько этих решений?

Задача 15. Сколько решений имеет уравнение а) $e^x = 100x$; б) $e^x = x^{100}$?