Анализ IV: Предел функции и производная

Соглашение. Все функции в листке определены на множестве $M \subset \mathbb{R}$, которое можно считать числовым промежутком или объединением нескольких числовых промежутков.

▷ **Определение 1.** Говорят, что число b является пределом функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ в точке $a \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов M, сходящейся к a, но не содержащей a, последовательность $f(x_n)$ сходится к b.

▷ **Определение 2.** Говорят, что число b является пределом функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ в точке $a \in M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f\big(\dot{U}_\delta(a) \cap M\big) \subset U_\varepsilon(b),$$

где $\dot{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Задача 0. а) Функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
б) Что произойдет, если в определении 2 заменить проколотую окрестность на обычную?
в) Два определения выше эквивалентны.

▷ **Определение 3.** Если

$$\forall C > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \; |f(x)| \leqslant C|h(x)|,$$

то пишут $f = o(h)$, $\quad x \to x_0$ (“f есть o-малое от h в окрестности точки x_0”).

Задача 1. Сформулируйте утверждения об арифметике пределов функций, арифметике о-малых; при необходимости, докажите их.

Задача 2. $\lim f(x) = a \iff f(x) = a + o(1)$.

Задача 3. В окрестности нуля
а) $\sin x = x + o(x)$; б*) $\sin x = x + o(x^2)$; в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Задача 4. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$.
а) Если функция f неперерывна в точке y_0, то[1] $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f\big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big)$.
б) Если $\exists \delta > 0 : g^{-1}(y_0) \cap \dot{U}_\delta(x_0) = \varnothing$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, где $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Задача 6. а) $e^x \geqslant 1 + x$.
В окрестности нуля б) $e^x = 1 + x + o(x)$; в*) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Задача 7. а) Показательная функция непрерывна.
б) Функция $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена для всех положительных x.

Задача 8. Найдите
а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

[1] Здесь и далее равенство двух пределов надо понимать в том смысле, что если существует правая часть, то существует и левая (и они равны).

▷ **Определение 4.** Если в окрестности точки x_0 для некоторого числа a верно, что

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

то говорят, что *производная* функции f в точке x_0 равна a (и пишут $f'(x_0) = a$).

Задача 9. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$.

Задача 10. а) Если функция дифференцируема и не убывает на интервале, то ее производная неотрицательна на этом интервале.
б) Функция дифференцируема и возрастает на интервале. Обязательно ли ее производная положительна на этом интервале?
в) Если функция f имеет локальный максимум или минимум во внутренней точке своей области определения x_0, и производная $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = 0$.

Задача 11. а) дифференцирование линейно: $(f + g)' = f' + g'$, $(af)' = af'$;
б) $(fg)' = f'g + fg'$ (“правило Лейбница”); в) найдите $(f/g)'$.

Задача 12. Найдите производную функции
а) x^n; б) $\sqrt{x}$; в) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$; г) e^x; д) a^x; е) $\ln x$, $\log_a x$.

Задача 13. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (“производная сложной функции”).

Задача 14. При каких α функция $x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ а) непрерывна; б) дифференцируема в нуле? (Полезно начать с построения графиков для $\alpha = 0, 1, 2$.)

Задача 15. Найдите производную функции а) $\sqrt{1 - x^2}$; б) $x \sin \frac{1}{x}$; в) $x^2 \sin \frac{1}{x}$; г*) x^x.

Задача 16. а) Пусть производная функции f существует и положительна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда функция f обратима в этой окрестности.
б) Чему равна производная обратной функции?

Задача 17. Найдите производные обратных тригонометрических фукнций.

Задача 18. Функция на прямой непрерывна и дифференцируема в каждой точке. Можно ли утверждать, что ее производная непрерывна в каждой точке?

Задача 19. Функция f непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$.
а) Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$ (“теорема Ролля”).
б) Существует точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (“теорема Лагранжа”).

Задача 20. Если производная функции положительна на некотором интервале, то сама функция строго возрастает на этом интервале.

Задача 21. а) $f'(x_0) = 0$. Можно ли утверждать, что x_0 — локальный экстремум (максимум или минимум) функции f?
б) $f'(x_0) > 0$. Можно ли утверждать, что в некоторой окрестности точки x_0 функция f монотонно возрастает?

Задача 22*. Функция, имеющая на всей прямой неотрицательную производную, строго возрастает тогда и только тогда, когда ее производная положительна на всюду плотном подмножестве прямой.

Задача 23*. Если функция дифференцируема на отрезке, то для ее производной выполняется теорема о промежуточном значении.

Задача 24*. Функция на прямой непрерывна и дифференцируема в каждой точке. Можно ли утверждать, что ее производная непрерывна хотя бы в одной точке?