Приближение действительных чисел рациональными III: Уравнение Пелля

▷ **Определение 1.** Пусть d — целое число, свободное от квадратов. *Нормой* элемента $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ называется целое число $N(z) = x^2 - dy^2$.

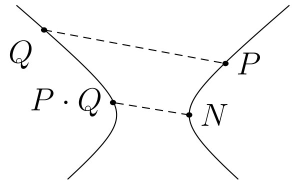
Задача 1. Норма мультипликативна: $N(zw) = N(z)N(w)$.

▷ **Определение 2.** Пусть d — целое число, свободное от квадратов. Диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ называется *уравнением Пелля.*

Решением уравнения Пелля мы будем называть как пару целых чисел $(x\ y)$, так и соответствующий элемент единичной нормы $x + y\sqrt{d}$ кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Задача 2. а) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное (отличное от $(\pm 1\ 0)$) решение, то оно имеет бесконечно много решений.
б) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное решение, то группа его положительных решений изоморфна $\mathbb{Z}$.

Задача 3*. Пусть $N = (1\ 0)$; P и Q — пара точек на гиперболе $x^2 - dy^2 = 1$. Проведем через точку N секущую, параллельную хорде PQ.
а) Эта секущая пересекает гиперболу еще ровно в одной точке[1].
б) Построенная точка соответствует произведению элементов единичной нормы, соответствующих точкам P и Q.



Задача 4. Решите уравнение а) $x^2 - 3y^2 = -2$; б) $x^2 - 3y^2 = -1$.

Задача 5. Найдите формулу для k-го треугольного числа, являющегося точным квадратом.

▷ **Определение 3.** Значением *квадратичной формы* с (симметричной) матрицей Q на векторе v называется число (v, Qv). Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ задает квадратичную форму $ax^2 + bxy + cy^2$.

Задача 6*. Отображение Q квадратично тогда и только тогда, когда отображение $(u, v) \mapsto Q(u + v) - Q(u) - Q(v)$ билинейно[2].

Задача 7. Как меняется квадратичная форма при замене координат с матрицей C?

Задача 8. а) Существует лишь конечное число целочисленных квадратичных форм с $ac < 0$ и фиксированным дискриминантом $-d < 0$.
б) Целочисленная квадратичная форма $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ имеет нетривиальный автоморфизм (т. е. существует обратимая целочисленная замена координат, при которой эта форма не меняется). Указание. Рассмотрите алгоритм вытягивания носов для $\sqrt{d}$.
в) Уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.
г) Разложение числа $\sqrt{d}$ в цепную дробь периодично.
д*) Разложение иррационального числа в цепную дробь периодично тогда и только тогда, когда это квадратичная иррациональность (“теорема Лагранжа”).

[1]Если отрезок PQ оказался вертикальным, то надо считать, что вторая точка совпадает с N (в этом случае наша “секущая” как раз касается гиперболы).

[2]Это можно считать определением квадратичного отображения — а доказывать, соответственно, что любое квадратичное отображение задается некоторой симметричной матрицей.

Задача 9. У числа $\sqrt{d}$ бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(2\sqrt{d}-\varepsilon)q^2}$.

Задача 10*. а) Период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ без последнего числа — палиндром.
б) Уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение тогда и только тогда, когда период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ имеет нечетную длину.