Линейная алгебра II: Линейные отображения и их матрицы

▷ **Определение 1.** Отображение $A\colon V \to W$ между линейными пространствами над полем k называется *линейным*, если выполнены следующие 3 условия:
0) $A(0) = 0$;
1) $\forall u, v \in V\ A(u+v) = A(u) + A(v)$;
2) $\forall \lambda \in k\ \forall v \in V\ A(\lambda v) = \lambda A(v)$.
Линейное отображение из линейного пространства в себя называется (линейным) *оператором* на этом пространстве[1].

Задача 1. Следующие отображения являются k-линейными
а) $U \to V, x \mapsto 0$; б) $k \to k, x \mapsto ax$;
в) $k^n \to k^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ (перестановка координат)
г) $k^n \to k^n, (x_1, \dots, x_n) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$; д) $k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}}, (x_1, x_2, \dots) \to (0, x_1, x_2, \dots)$.
е) $k^n \mapsto k, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ (проекция на i-ю координату);
ж) $k[x] \to k, f \mapsto f(\lambda)$ (вычисление значения многочлена в точке λ);
з) вычисление предела (как отображение из сходящихся последовательностей в числа);

▷ **Определение 2.** *Ядром* линейного отображения $A\colon V \to W$ называется прообраз нуля при этом отображении (обозначение: $\operatorname{Ker} A$).

Задача 2. а) Ядро линейного отображения — линейное подпространство.
б) Линейное отображение является вложением тогда и только тогда, когда его ядро тривиально (состоит только из 0).

▷ **Определение 3.** Пусть V — векторное пространство, U — его подпространство. Фактор-множество пространства V по отношению эквивалентности "$v_1 \sim v_2 \iff \exists u \in U : v_1 = v_2 + u$" обозначается V/U.

Задача 3. V/U наследует структуру векторного пространства (такую что отображение $V \to V/U$ линейно).

Задача 4. Если U — подпространство конечномерного векторного пространства V, то

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Задача 5. Пусть U_i — подпространства векторного пространства V. Обязательно ли
а) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$;
б*) $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim U_1 \cap U_2 - \dim U_2 \cap U_3 - \dim U_3 \cap U_1 + \dim U_1 \cap U_2 \cap U_3$?

Задача 6. а) Любое линейное отображение A задает изоморфизм $V/\operatorname{Ker} A \cong \operatorname{Im} A$.
б) Если A — оператор на конечномерном пространстве V, то

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A.$$

Задача 7. а) Оператор на конечномерном пространстве обратим тогда и только тогда, когда он имеет тривиальное ядро. б) Верно ли это для операторов на пространстве последовательностей?

[1] С операторами на $\mathbb{R}^2$ мы уже сталкивались в листке «Дважды два».

Задача 8. а) Пусть (a_{ij}) — матрица $n \times m$ элементов поля k. Тогда отображение $A\colon k^m \to k^n$, задаваемое формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix},$$

является k-линейным.
б) Любое линейное отображение $A\colon k^m \to k^n$ задается некоторой матрицей.
(Указание. По столбцам этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов.)

▷ Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение конечномерных пространств. Выбор базисов отождествляет эти пространства с пространствами вида k^n и k^m, а отображение A — с отображением, задаваемым *матрицей данного отображения в данном базисе*.

Задача 9. Найдите матрицы отображений из задачи 1 (кроме последнего).

Задача 10. Пусть зафиксированы элементы $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ поля k. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому многочлену степени не выше n набор значений в точках λ_i.
а) Найдите его матрицу в базисе $1, x, \dots, x^n$; б) Обратимо ли это отображение?

Задача 11. При композиции отображений их матрицы перемножаются по правилу

$$(AB)_{ij} = \sum_s A_{is} B_{sj}.$$

Задача 12. Вычислите

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10}$.

Задача 13. а) Пусть (e_i) и (e'_i) — два базиса в векторном пространстве V. Запишем координаты нового базиса в старом в виде матрицы C: i-й столбец матрицы C — координаты вектора e'_i в базисе (e_i). Как связаны координаты произвольного вектора v в старом и новом базисах?
б) Сделаем в пространствах V и W замены координат с матрицами C и D соответственно. Как при этом изменится матрица отображения $A\colon V \to W$? (А если $V = W$ и $C = D$?)

Задача 14. а) Матрица любого линейного отображения заменой базисов приводится к диагональному виду. б) Верно ли это для операторов?

Задача 15*. Пусть A — оператор на конечномерном пространстве. Тогда существует многочлен $f \in k[X]$, такой что $f(A) = 0$.

Дополнительная часть: Определители

▷ **Определение 4.** Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k. Функция $\mathrm{vol}\colon V^n \to k$ называется *ориентированным объемом*[2], если она линейна *по каждому из аргументов* и обращается в ноль, если какие-то из ее аргументов равны.

Задача 16*. В трехмерном евклидовом пространстве *смешанное произведение* $(u, [v, w])$ задает ориентированный объем.

Задача 17. Ориентированный объем *кососимметричен*, т. е. меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Задача 18. Пространство ориентированных объемов на данном векторном пространстве одномерно (т. е. ориентированный объем единственен с точностью до множителя).

Задача 19. а) Пусть A — линейный оператор на пространстве V с объемом vol. Тогда $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \mathrm{vol}(Av_1, \ldots, Av_n)$ — тоже ориентированный объем на пространстве V.
б) Линейный оператор A домножает любой ориентированный объем на одно и то же число (оно называется *определителем* оператора A и обозначается $\det A$).

Задача 20. Определитель мультипликативен: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Задача 21. Найдите определитель а) диагональной матрицы; б) перестановки координат; в) матрицы $E_{ij}(\lambda)$, у которой на диагонали стоят единицы, в клетке (i, j) число λ, а во всех остальных клетках нули.

Задача 22. Пусть оператор A имеет матрицу (a_{ij}). Тогда

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)};$$

в частности,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Задача 23. Любое конечномерное векторное пространство обладает (ненулевым) ориентируемым объемом.

Задача 24. а) Оператор обратим, если и только если его определитель не равен нулю.
б) Определитель матрицы обращается в ноль тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно зависимы.

Задача 25. а) Вычислите определители $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$.
б) Для произвольного набора $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ элементов поля k

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \ldots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

(Указание. Когда левая часть обращается в ноль?)
в) Функции вида $n \mapsto \lambda^n$ при различных λ линейно независимы (над любым полем).

[2]Геометрически $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)$ — это способ вычислять (ориентированный) объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на соответствующие вектора.