Приближение действительных чисел рациональными II: Цепные дроби

▷ **Определение 1.** Пусть a_0 — целое число, a_i — натуральные числа. Выражение вида

$$[a_0; a_1; \ldots] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$

называется *цепной дробью*; число $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; \ldots; a_n]$ называется n-й *подходящей дробью* или *конвергентой.*

Задача 1. а) Вычислите $[3; 7; 15; 1]$ (с точностью до 7 знаков после запятой) и $[1; 1; \ldots]$; б) разложите в цепную дробь числа $10/7$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

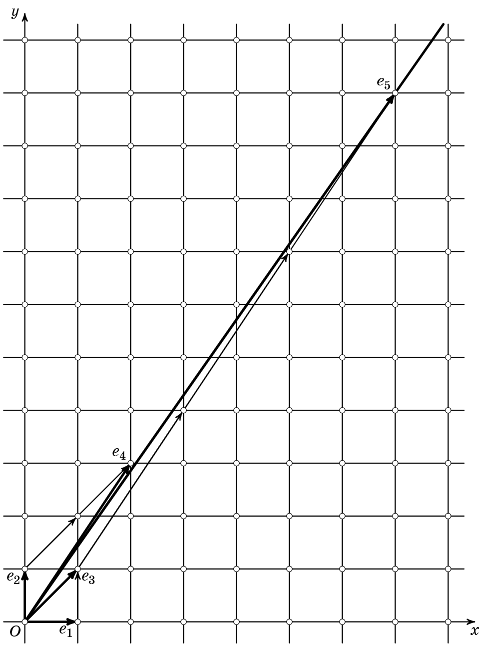
Задача 2. Для любой бесконечной цепной дроби $[a_0; \ldots]$ последовательность конвергент сходится к некоторому действительному числу.

Задача 3. а) Ненулевое рациональное число может разложено в цепную дробь (“алгоритм Евклида”), причем ровно двумя способами: вида $[a_0; \ldots; a_n]$ и $[a_0; \ldots; a_n - 1; 1]$.
б) Иррациональное число может разложено в цепную дробь ровно одним способом.

Задача 4. а) $[a_0; a_1; \ldots; a_n; z]$ — дробно-линейная функция от z.
б*) Функция $\frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ представима в виде $[a_0; \ldots; a_n; z] \iff \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$.

Задача 5. Если разложение иррационального числа в цепную дробь периодично, то это квадратичная иррациональность[1].

Задача 6. Пусть α — положительное число. Рассмотрим последовательность векторов (e_i): $e_1 = (1\ 0)$, $e_2 = (0\ 1)$; $e_{i+1} = e_{i-1} + a_{i-2}e_i$, где в качестве a_{i-2} берется наибольше натуральное число, при котором e_{i+1} остается с той же стороны от прямой $y = \alpha x$, что и e_{i-1} (“алгоритм вытягивания носов”).
а) Пара векторов (e_i, e_{i+1}) — базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.
б) Вектора (e_{2k-1}) и (e_{2k}) являются вершинами выпуклой оболочки части $\mathbb{Z}^2$ под и над прямой $y = \alpha x$ соответственно.
в) $\alpha = [a_0; a_1; \ldots]$, $e_{n+2} = (q_n\ p_n)$.
г) n-я подходящая дробь является наилучшим[2] приближением к α среди дробей со знаменателем, не превосходящим q_n.



Задача 7. а) $\det \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}$.
б) У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$. (Ср. с задачей 8 листка 15д.)

Задача 8*. У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, причем константу $\sqrt{5}$ нельзя улучшить (“теорема Гурвица–Бореля”).

[1] Как мы увидим позже, верно и обратное (“теорема Лагранжа”).
[2] В смысле коэффициента качества приближения $q|\alpha - \frac{p}{q}|$ из листка 15д.

Дополнительная часть: Комбинаторные аспекты цепных дробей

Задача 9. Числитель и знаменатель подходящей дроби для $[1;1;\ldots;1]$ — два последовательных числа Фибоначчи (в частности, $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = [1;1;\ldots])$.

Задача 10*. Последовательность (a_i) удовлетворяет некоторой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда ее производящая функция $a_0 + a_1 t + a^2 t^2 + \ldots$ рациональна.

▷ **Определение 2.** *Пути Дика* — это пути из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящие из шагов $(1,1)$ и $(1,-1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y=0$. Количество таких путей — это n-е число Каталана.

Пути Моцкина – это пути из точки $(0,0)$ в точку $(n,0)$, состоящие из шагов $(1,1)$, $(1,0)$ и $(1,-1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y=0$. Количество таких путей называется n-м *числом Моцкина.*

Задача 11. а) Производящая функция для чисел Каталана равна (обобщенной) цепной дроби
$$\frac{1}{1-\frac{t}{1-\frac{t}{1-\ldots}}}.$$
б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Дика, не поднимающихся выше прямой $y=k$...

в) ...и она же равна производящей функции для плоских корневых деревьев[3], имеющих высоту не более k.

Задача 12. а) Производящая функция для чисел Моцкина равна (обобщенной) цепной дроби
$$\frac{1}{1-t-\frac{t^2}{1-t-\frac{t^2}{1-\ldots}}}.$$
б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Моцкина, не поднимающихся выше прямой $y=k$.

(Упражнение: придумайте несколько комбинаторных интерпретаций чисел Моцкина, аналогичных вашим любимым интерпретациям чисел Каталана; попробуйте описать подмножества этих объектов, соответствующие конвергентам цепной дроби.)

[3] Ср. с задачей 7 листка «Числа Каталана».