

Применения непрерывности

Задача 1. Однажды утром в 9:00 турист вышел из лагеря к вершине горы и добрался туда в 20:00. В 9:00 следующего дня он начал спуск с вершины (по той же тропе, что и поднимался) и в 20:00 вернулся в лагерь. Докажите, что на тропе найдется точка, которую турист проходил в одно и то же время и в день подъема, и в день спуска.

Задача 2. В любой момент на земном шаре найдутся две диаметрально противоположные точки с одинаковой температурой.

Задача 3. а) Плоский (ограниченный) блин можно разделить горизонтальным разрезом на две равновеликие части.

б) Пару плоских (ограниченных) блинов можно разделить одним прямолинейным разрезом на две равновеликие части каждый.

Задача 4*. На плоскости расположено 20 точек: 10 синих и 10 красных, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону которой лежит 5 синих и 5 красных точек.

Задача 5. Торт можно разделить двумя перпендикулярными прямолинейными разрезами на четыре равновеликих куска.

Задача 6. Бутерброд с сыром и ветчиной можно разделить пополам (так, чтобы в обеих частях было поровну и хлеба, и сыра, и ветчины) одним плоским разрезом.

Задача 7*. а) Есть несколько кусков сыра разной массы. Докажите, что можно разрезать не более одного куска так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы.

б) Есть несколько кусков сыра разной массы и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы и одинаковой стоимости.

в) Сформулируйте и докажите обобщение этого утверждения на сыр с k характеристиками.

Задача 8. Вокруг любой плоской замкнутой кривой можно описать квадрат.

Задача 9.** В любую плоскую замкнутую кривую можно вписать прямоугольник¹.

Задача 10*. Из деревни A в деревню B ведут две дороги. Известно, что два круглых веза диаметра 10 метров, выехавшие в противоположных направлениях, могут разъехаться. Докажите, что две точечные телеги, связанные веревкой длины 9 метров, не могут проехать из A в B каждая по своей дороге.

¹В том смысле, что вершины прямоугольника должны лежать на кривой.