Формальные ряды II: Вычеты и формула обращения Лагранжа

▷ **Определение 1.** *Рядом Лорана* над полем k называется (бесконечная вправо) формальная запись вида $a_{-N}x^{-N}+\dots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$. Кольцо рядов Лорана обозначается $k((x))$ или $k[x^{-1},x]]$.

Задача 1. $k((x))$ — поле частных кольца $k[[x]]$.

▷ **Определение 2.** Определим $\Omega_{k((x))/k}$ как фактор векторного пространства над $k((x))$, формально порожденного символами df $(f\in k((x)))$, по двум соотношениям:
1) $\forall f_i\in k((x))\; d(\sum f_i)=\sum df_i, \quad \forall f\in k((x))\,\forall c\in k\; d(cf)=c\,df$;
2) $\forall f,g\in k((x))\; d(fg)=f\,dg+g\,df$.

Задача 2. $\Omega_{k((x))/k}$ — одномерное векторное пространство над полем $k((x))$ с образующей dx. (Контрольный вопрос: чему равно $\frac{df}{dx}$?)

▷ **Определение 3.** *Вычетом* формы $f\,dx\in\Omega_{k((x))/k}$ (в нуле) называется коэффициент $[x^{-1}]f$ (коэффициент при x^{-1} ряда f). Обозначение: $\mathrm{res}_x(f\,dx)$.

Задача 3. а) Вычет задает изоморфизм $\Omega_{k((x))/k}/\operatorname{Im} d\to k$. б) $\mathrm{res}(u\,dv)=-\mathrm{res}(v\,du)$.

Задача 4. Вычет формы не зависит[1] от выбора локальной координаты:

$$\mathrm{res}_x\big(f\,dx\big)=\mathrm{res}_t\big(f\,dx\big)$$

для любого ряда $x(t)\in k^\times t+t^2k[[t]]$ (другими словами, $[x^{-1}]f(x)=[t^{-1}]f(x(t))x'(t)$).

▷ **Определение 4.** Вычетом рациональной формы $\omega\in\Omega_{\mathbb{C}(z)/\mathbb{C}}$ в точке z_0 называется вычет в нуле формы $\omega(z+z_0)$ (т. е. коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении формы ω по степеням $z-z_0$); вычетом формы ω на бесконечности называется вычет в нуле формы $\omega(1/z)$.

Задача 5. Найдите вычеты во всех точках формы а) $\dfrac{dz}{z-a}$; б) $\dfrac{z\,dz}{(z-a)(z-b)}$.

Задача 6. Сумма вычетов рациональной формы по всем точкам $\mathbb{C}P^1:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ равна нулю.

Задача 7. Если P — многочлен[2] степени не выше $n-1$, то

$$\tfrac{P(z_0)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\dots(z_0-z_n)}+\tfrac{P(z_1)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\dots(z_1-z_n)}+\ldots+\tfrac{P(z_n)}{(z_n-z_0)(z_n-z_1)\dots(z_n-z_{n-1})}=0.$$

Задача 8. Если $x=f(y)$ $(f\in k^\times t+t^2k[[t]])$, то $[x^k]y=\dfrac{1}{k}\,\mathrm{res}\left(\dfrac{dy}{f^k(y)}\right)$ ("формула обращения Лагранжа").

Задача 9. Корень уравнения x^d-x-a может быть (при $|a|\ll 1$) найден по формуле[3]

$$x=-\sum_{n\geqslant 0}\binom{dn}{n}\frac{a^{(d-1)n+1}}{(d-1)n+1}.$$

Задача 10. Найдите ряд $f\in\mathbb{Q}[[t]]$, такой что коэффициент при t^{n-1} ряда f^n равен 1.

[1] Именно поэтому мы определяем вычет для форм, а не для функций.
[2] Уже случай $P=1$ содержателен.
[3] Отметим, что в радикалах это уравнение (при $d\geqslant 5$) неразрешимо.

Задача 11. Если C_n — n-е число Каталана, $C(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$, то
а) $C - 1 = xC^2$; б) $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Задача 12*. Решите аналогичную задачу для числа разрезаний многоугольника диагоналями на $(d+1)$-угольники[4].

▷ **Определение 5.** *Экспоненциальной производящей функцией* последовательности (R_n) называется формальный ряд $R := \sum R_n \frac{x^n}{n!}$.

Задача 13. Если экспоненциальная производящая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y = xR(y)$, то $y_k = (R^k)_{k-1}$.

Задача 14. Пусть T_n — число корневых деревьев на множестве $\{1, \ldots, n\}$, $T = \sum T_n \frac{x^n}{n!}$.
а) $T = x \exp(T)$; б) найдите явную формулу для T_n.

[4]Напомним, что C_n есть число разрезаний $(n+2)$-угольника на треугольники.