Анализ III: Непрерывные функции

Соглашение. Все функции в этом листке определены на множестве $M \subset \mathbb{R}$, которое можно считать числовым промежутком или объединением нескольких числовых промежутков.

▷ **Определение 1.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Гейне* в точке $a \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов M, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

▷ **Определение 2.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Коши* в точке $a \in M$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\left(U_\delta(a) \cap M\right) \subset U_\varepsilon\left(f(a)\right).$$

▷ Если функия f не является непрерывной в точке a, то говорят, что a — *точка разрыва* функции f.

Задача 0. Запишите при помощи кванторов, что значит, что a — точка разрыва (по Коши) функции f.

Задача 1. а) Проверьте, что функция x^n непрерывна в нуле в смысле обоих определений.
б) В каких точках прямой непрерывна функция "целая часть"?

Задача 2. Определения непрерывности по Коши и по Гейне эквивалентны.

Задача 3. а) Сумма непрерывных функций непрерывна.
б) Произведение непрерывных функций непрерывно.
в) Частное непрерывных функций непрерывно (на своей области определения).

Задача 4. Многочлен непрерывен на всей прямой; рациональная функция непрерывна на своей области определения.

Задача 5. Функция а) $|x|$; б) $\sqrt{x}$ непрерывна на своей области определения.

Задача 6. а) $\sin x < x$ при $0 < x < \pi/2$.
б) Тригонометрические функции (sin, cos, tg) непрерывны на всей области определения.

Задача 7. Композиция непрерывных функций непрерывна.

Задача 8. В каких точка прямой непрерывна

а) функция Дирихле, $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) функция Римана, $\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}? \end{cases}$

Задача 9*. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно неубывает. Может ли множество ее точек разрыва совпадать с а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Задача 10. а) Если непрерывная функция на отрезке принимает на одном его конце положительное значение, а на другом отрицательное, то в какой-то точке отрезка она обращается в ноль.
б) Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$ *("теорема Вейерштрасса о промежуточном значении")*.

Задача 11. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет корень.

Задача 12. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна. Тогда обратная функция определена на всем отрезке $[f(a), f(b)]$ и также непрерывна.

Задача 13. Обратные тригонометрические функции (arcsin, arccos, arctg) определены и непрерывны.

Задача 14. Непрерывная на отрезке функция а) ограничена; б) достигает своих максимального и минимального значений[1].

Задача 15. а) Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то образ отрезка — отрезок. б) Каким может быть образ интервала?

Задача 16*. Последовательность непрерывных функций (f_n) сходится к функции f *поточечно* (т. е. $\forall x \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$). Можно ли утверждать, что функция f а) непрерывна во всех точках; б*) непрерывна хотя бы в одной точке?

▷ **Определение 3.** Говорят, что последовательность функций (f_n) сходится к функции f *равномерно*[2], если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\, \forall x \in M\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Задача 17*. Всегда ли равномерный предел является и поточечным? А наоборот?

Задача 18*. Равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Задача 19*. Существует непрерывная функция, не монотонная ни на каком интервале.

[1] То есть существует точка отрезка, значение функции в которой не меньше (соотв., не больше) значения в любой другой точке отрезка.
[2] Ср. с поточечной сходимостью: $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in M\, \exists N : \forall n > N\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.