Формальные ряды

Задача 1. а) Если $f(x) = e^x$, то $f' = f$. б) Если $f(x) = \cos x$ или $\sin x$, то $f'' = -f$.

Задача 2. Решите уравнение а) $f' = 0$; б) $f' = a$; в) $f' = f$.

▷ **Определение 1.** Пусть K — поле[1]. *Формальным степенным рядом* называется (бесконечная) формальная запись вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ (a_i — элементы поля K, а x — формальный символ). Кольцо формальных степенных рядов обозначается $K[[x]]$.

Задача 3. Вычислите в кольце $K[[x]]$ а) $\frac{1}{1+x}$; б) $\frac{1}{1+x+x^2}$; в*) $\sqrt{1+2x}$.

Задача 4. а) Выясните, когда у формального ряда есть обратный.
б) Как в кольце $K[[x]]$ обстоит дело с основной теоремой арифметики?

Задача 5. а) Если $\varphi(t) = t + a_2t^2 + \cdots$, то для любого $f \in K[[t]]$ определен ряд $f(\varphi(t))$.
б) Множество $t + t^2K[[t]]$ образует группу относительно композиции (с единицей t).

▷ **Определение 2.** *Производной* ряда $f(t) = \sum_k a_kt^k$ называется ряд $f'(t) = \sum_k ka_kt^{k-1}$.

Задача 6. а) $(fg)' = f'g + fg'$; б) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

▷ Напомним, что формальной экспонентой называется ряд $\exp(x) := 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\cdots$.

Задача 7. а) $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.
б*) Единственная дифференцируемая функция на прямой, такая что $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$, $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$, — это e^x.

Задача 8*. $\exp(\ln(1+x)) = 1+x$, где $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^k\frac{x^k}{k} + \cdots$.

Задача 9*. Пусть $\alpha \in K$, $f \in 1+xK[[x]]$. Положим $f^\alpha = \exp(\alpha \ln f)$. Тогда $f^{\alpha+\beta} = f^\alpha \cdot f^\beta$ (в частности, для натуральных степеней это определение согласованно с естественным).

Задача 10*. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \dfrac{\alpha^{\downarrow k}}{k!}x^k + \cdots$.

▷ **Определение 3.** *Линейным однородным дифференциальном уравнением с постоянным коэффициентами* степени n называется уравнение вида

$$a_0f^{(n)} + a_1f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}f' + a_nf = 0, \qquad (*)$$

где a_i — фиксированные элементы поля, $a_0 \neq 0$.

Задача 11. Все решения уравнения $f' = f$ имеют вид $f = C\exp(x)$.

Задача 12. Совокупность формальных решений[2] уравнения $(*)$ является линейным пространством размерности n.

Задача 13. Опишите все решения уравнения $(*)$ в случае, когда его характеристическое уравнение не имеет кратных корней.

Задача 14. В кольце формальных степенных рядов над комплексными числами

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

где cos и sin — базис (формальных) решений уравнения $f'' = -f$.

Задача 15*. Сформулируйте и докажите аналог задачи 7 для синуса и косинуса.

---

[1] Далее будет предполагаться, что $\operatorname{char} K = 0$; можно считать, что K — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
[2] Т. е. решений в кольце формальных степенных рядов (а не среди настоящих функций).

Дополнительная часть: Аналитические функции

▷ **Определение 4.** *Значением* формального ряда $f(x) = \sum_i a_i x^i$ в точке x_0 называется сумма ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i.$$

Радиусом сходимости ряда f называется число $\sup\{|x_0| : \text{ряд } f(x_0) \text{ сходится}\}$.

Задача $15\frac{1}{3}$. а) Если ряд $\sum a_i$ сходится, то $\lim a_i = 0$. б) Верно ли обратное?

▷ **Определение $4\frac{1}{2}$.** Говорят, что ряд $\sum a_i$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд $\sum |a_i|$.

Задача $15\frac{2}{3}$. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 16. а) Если последовательность (a_i) такова, что $|a_i| \leqslant q^i$ для некоторого $0 < q < 1$, то ряд $\sum_i a_i$ сходится, причем абсолютно.
б) Если радиус сходимости ряда f равен R, то при $|x| < R$ ряд $f(x)$ сходится, причем абсолютно (а при $|x| > R$ — расходится).
в*) Радиус сходимости R формального ряда $\sum_i a_i x^i$ может быть найден по формуле

$$R = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

где $\varliminf_n x_n = \lim_n \inf_{m\geq n}\{x_m\}$.

Задача 17. Найдите радиусы сходимости рядов а) exp, cos, sin; б) $\frac{1}{1+x}$; $\frac{1}{1+x^2}$; $\ln(1+x)$.
в) Приведите пример формального ряда с нулевым радиусом сходимости.

Задача 18*. Пусть $f(x) = \sum_i a_i x^i$ — формальный ряд с радисом сходимости R.
а) Последовательность функций $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на области $|x| \leqslant r$ для любого $r < R$ (“последовательность функций f_n сходится к функции f *равномерно на компактах*”).
б) В области $|x| < R$ функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и ее формальная производная совпадает с обычной[3].

▷ **Определение 5.** Функция, совпадающая в окрестности нуля с некоторым степенным рядом, называется *аналитической* (в нуле).

Задача 19. Для аналитической функции в некоторой окрестности нуля имеет место “формула Маклорена”:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Задача 20. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha^{\downarrow k}}{k!}x^k + \ldots$ (“бином Ньютона”).

Задача 21. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всей прямой, но не аналитична в нуле.

---

[3]Далее этим утверждением можно пользоваться без доказательства.

Задача $21\frac{1}{2}$. а) Если $f'' = -f$, то $f^2 + (f')^2 = \mathrm{const}$.
б) Если $f'' = -f$ и $f(0)^2 + f'(0)^2 = 1$, то $(\arcsin f)' = \pm 1$.
в) Если $f'' = -f$ и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то $f(x) = \sin x$.
г) Синус и косинус могут быть разложены в ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\,; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\,.$$

▷ Задача 16 показывает, что *вещественно*-аналитическая функция с радиусом сходимости R может быть канонически продолжена на *комплексный* круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Задача 22. Для аналитических продолжений экспоненты, синуса и косинуса на комплексную плоскость

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$