Линейная алгебра I: Линейные уравнения и линейные пространства

▷ **Определение 0.** Будем говорить, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

имеет матрицу A и правую часть b, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Задача 1 (метод Гаусса). а) Вычитание из одного уравнения системы другого, умноженного на произвольное число — равносильное преобразование.
б) Любая система линейных уравнений над полем равносильна системе со *ступенчатой матрицей* — матрицей, в которой в каждой следующей строке первый ненулевой коэффициент (если он есть) стоит правее, чем в предыдущей.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

в) Сформулируйте метод решения произвольной системы линейных уравнений над полем.

Задача 2. Решите следующие системы линейных уравнений.

а) $\begin{cases} a + b + c + d = 1; \\ a + 2b + 4c + 8d = 2; \\ a + 3b + 9c + 27d = 3; \\ a + 4b + 16c + 64d = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + b = 2; \\ b + c = 2; \\ c + d = 2; \\ d + a = 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} a + b = 1; \\ b + c = 3; \\ c + d = 4; \\ d + a = 2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4a = d + b + 2; \\ 4b = a + c + 2; \\ 4c = b + d + 2; \\ 4d = c + a + 2. \end{cases}$

Задача 3. Если в системе линейных уравнений с нулевой правой частью неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет нетривиальные решения.

Задача 4. Если система линейных уравнений над рациональными числами имеет вещественное решение, то она имеет и рациональное решение.

▷ **Определение 1.** *Ядром* матрицы A называется множество $\operatorname{Ker} A$ решений *однородной системы* $Ax = 0$.

Задача 5. Если $Ax_0 = b$, то множество всех решений системы $Ax = b$ имеет вид $x_0 + \operatorname{Ker} A := \{x_0 + v \mid v \in \operatorname{Ker} A\}$.

▷ **Определение 2.** *Векторным* (или линейным) *пространством* над полем F называется множество V вместе с выделенным элементом $0 \in V$ и операциями *сложения векторов* $+ \colon V \times V \to V$ и *умножения на скаляры* $\cdot \colon F \times V \to V$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

$A_1)$ $\forall u, v, w \in V \ (u+v)+w = u+(v+w)$;
$A_2)$ $\forall v \in V \ v+0 = v = 0+v$;
$A_3)$ $\forall u, v \in V \ u+v = v+u$;
$A_4)$ $\forall v \in V \ \exists -v \in V : v+(-v) = 0$;

$D_1)$ $\forall \lambda \in F \ \forall u, v \in V \ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$;
$D_2)$ $\forall \lambda, \mu \in F \ \forall v \in V \ (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$;
$M_1)$ $\forall \lambda, \mu \in F \, \forall v \in V \ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
$M_2)$ $\forall v \in V \ 1 \cdot v = v$.

Некоторые примеры векторных пространств: вектора на плоскости и в пространстве (над $\mathbb{R}$), F^n (над F), $\mathbb{C}$ (над $\mathbb{R}$), $F[x]$ (над F), $F(x)$ (над F), функции на отрезке (над $\mathbb{R}$).

Задача 6. а) $0 \cdot v = 0$; б) $-v = (-1)v$; в*) следует ли аксиома A_3 из остальных?

Задача 7. Ядро любой матрицы является векторным подпространством векторного пространства F^n.

▷ **Определение 3.** Говорят, что набор векторов $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ *порождает* векторное пространство V, если операциями сложения и умножения на скаляры можно получить из элементов множества S любой вектор пространства V.

Говорят, что набор векторов $\{e_1, \dots e_n\} \subset V$ является *базисом* векторного пространства V, если любой вектор линейно выражается через них ровно одним способом.

Задача 8. Набор векторов, порождающий векторное пространство, является его базисом тогда и только тогда, когда никакой из них не выражается через остальные.

Задача 9. а) Если векторное пространство порождено конечным множеством S, то из последнего можно выбрать базис. б*) Условие конечности можно отбросить.
в) Ядро любой матрицы обладает базисом.

Задача 10. Для любой системы n линейных уравнений над полем F с n неизвестными имеет место *альтернатива Фредгольма*:
— либо при любой правой части решение системы существует и единственно (“матрица A невырожденна”),
— либо при некоторых правых частях система не имеет решений, а при остальных имеет F^s $(s > 0)$ решений[1].

Задача 11. В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно ровно одним способом расставить числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому ее соседей по стороне.

Задача 12*. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что каждая внутренняя точка является серединой какого-то отрезка с отмеченными концами. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

Задача $12\frac{1}{2}$*. В стаде 101 корова. Известно, что после продажи любой из коров оставшиеся 100 коров можно разделить на два стада по 50 коров так, что массы этих стад будут равны. Докажите, что массы всех коров равны, если изестно, что веса коров а) натуральные; б) рациональные; в) действительные числа.

[1]Для $F = \mathbb{R}$ это означает, в частности, что решений бесконечно много.

▷ **Определение 4.** *Размерностью* векторного пространство называется мощность его базиса.

Задача 13. Размерность а) конечномерного; б*) произвольного векторного пространства определена корректно.

Задача 14. Пространство решений однородной системы из k уравнений с n неизвестными имеет размерность не менее $n-k$.

▷ **Определение 5.** *Линейной рекуррентой* порядка k над полем F называется уравнение на последовательность (x_n) вида

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n+1-k},$$

где a_i — фиксированные элементы поля F.

Характеристическим уравнением этой рекурренты называется уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_k.$$

Задача 15. Множество решений линейной рекурренты порядка k является векторным пространством размерности k.

Задача 16. а) Последовательность λ^n ($\lambda \neq 0$) является решением линейной рекурренты тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического уравнения.
б) Если характеристическое уравнение рекурренты порядка k имеет k *различных* корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то любое решение рекурренты имеет вид $c_1\lambda_1^n + \dots + c_k\lambda_k^n$.

Задача 17*. Опишите общее решение линейной рекурренты, если ее характерестическое уравнение а) имеет вид $(\lambda-\lambda_0)^2 = 0$; б) имеет k корней, часть из которых совпадает.

Задача 18. Решите рекурренты
а) $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = F_1 = 1$;
б) $T_{n+1} = T_n + 3T_{n-1} + T_{n-2}, \quad T_0 = T_1 = T_2 = 1$;
в) $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = \cos\phi$;
г) $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = \sin\phi$.

Задача 19*. Последовательность (x_n) задана условиями $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{x_{n-1}}$. Докажите, что все ее члены — целые числа.