Вероятность II: Случайные величины и закон больших чисел

▷ **Определение 1.** Пусть задано конечное вероятностное пространство. *Случайной величиной* на этом пространстве будем называть отображение из него в действительные числа. Вероятность того, что значение случайной величины ξ лежит в подмножестве S действительных чисел, определяется как вероятность события $\xi^{-1}(S)$.

Задача 0. Найдите вероятность того, что случайная величина «сумма чисел на двух кубиках» лежит на луче $[\pi; +\infty)$.

▷ **Определение 2.** *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число $E(\xi) := \sum_i p(e_i)\xi(e_i)$, где суммирование ведется по возможным исходам.

Задача 1. а) Из 1 000 000 билетов лотереи есть 1 билет с выигрышем 1 000 000 тугриков, 100 билетов с выигрышем 10 000 тугриков, 100 000 билетов с выигрышем в 10 тугриков. Стоимость билета — 10 тугриков. Каково матожидание выигрыша в эту лотерею?
б) Если при поездке в автобусе не купить билет за 25 рублей, то встретив контролера придется заплатить штраф в 1000 рублей. При какой вероятности встретить контролера становится выгоднее покупать билет?

Задача 2. а) Производится n испытаний, при каждом из которых событие S происходит с вероятностью p (“схема испытаний Бернулли”). Найдите вероятность $P_n(k)$ того, что всего это событие произойдет ровно k раз.
б*) Пусть n фиксировано. При каком k вероятность $P_n(k)$ максимальна?
в) Пусть ξ_n — *частота* (k/n) успеха в схеме Бернулли с n испытаниями. Найдите математическое ожидание $E(\xi_n)$.

Задача 3*. Правильную монету сначала кинули 10^2 раз, а потом 10^3 раз. Что вероятнее: что частота выпадения орла сильнее отклонится от $1/2$ в первом случае или во втором?

▷ **Определение 3.** *Дисперсией* случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание μ, называется число $V(\xi) := E(\xi - \mu)^2$.

Задача 4. Найдите дисперсию количества очков а) на кубике; б) в сумме на двух кубиках.

Задача 5. а) Если случайная величина η с матожиданием μ не принимает отрицательных значений, то

$$P(\eta < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

б) Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Тогда вероятность того, что ее значение отклонится от среднего более чем на ε не превосходит σ^2/ε^2:

$$P\left\{\xi \in U_\varepsilon(\mu)\right\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(“неравенство Чебышева”).

▷ **Определение 4.** Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$.

Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 с матожиданиями μ_1 и μ_2 называется число $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) := E[(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)]$. Если ковариация двух величин равна нулю, то говорят, что между ними *отсутствует корреляция.*

Задача 6*. *Коэффициент корреляции* $\dfrac{\operatorname{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{V(\xi)V(\eta)}}$ заключен между -1 и 1 и равен ± 1 тогда и только тогда, когда величины ξ и η линейно зависимы (по модулю событий нулевой вероятности).

Задача 7. а) Если случайные величины независимы, то между ними нет корреляции. б) Верно ли обратное?

Задача 8. Докажите, что $V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + 2\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) + V(\xi_2)$. В частности, если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то $V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2)$.

Задача 9. Найдите дисперсию частоты успеха в схеме Бернулли с n испытаниями.

Задача 10. Если при подкидывании монеты выпадает решка, Розенкранц платит Гильденстерну золотой, если орел — наоборот. Докажите, что вероятность того, что после 1000 конов кто-то из них обеднеет более чем на 100 монет, меньше 5%.

Задача 11. Пусть ξ_n — частота успеха в схеме Бернулли с n испытаниями. Тогда «при больших n частота обычно мало отличается от вероятности». А именно, для всякого $\varepsilon > 0$ вероятность $P\{\xi_n \in U_\varepsilon(p)\}$ стремится к единице при $n \to \infty$ *("закон больших чисел Бернулли").*

Задача 12*. После каждого часа игры в футбол Петя бросает монету. Если выпадает орел — он заканчивает игру, если решка — продолжает играть. Каково матожидание продолжительности игры?

Задача 13*. В каждую жевачку вложен один из n вкладышей, причем каждый вкладыш встречается с вероятностью $1/n$. Сколько в среднем надо купить жевачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Задача 14*. Какова вероятность того, что перестановка N элементов не имеет неподвижных точек?