Формула Эйлера–Маклорена и числа Бернулли

▷ **Определение 1.** Экспонентой оператора A называется оператор

$$\exp(A) := E + A + \frac{A^2}{2} + \dots$$

(например, экспонента оператора умножения на λ есть оператор умножения на e^{λ}).

Задача 1. а) Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор, переводящий многочлен в его производную. Тогда $\exp(\frac{d}{dx})f(x) = f(x+1)$ ("формула Тейлора").
б) Выразите значение многочлена в точке x через значения его производных в нуле ("формула Маклорена").

▷ **Определение 2.** *Рядом Тодда* называется формальный степенной ряд

$$\mathrm{td}(x) := \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

коэффициенты B_k называются *числами Бернулли*.

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{B_n}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Задача 2. Пусть f — многочлен, F — его *первообразная* (такой многочлен, что $F' = f$).
а) $f(x) + \dots + f(x+n-1) = \mathrm{td}\big(\frac{d}{dx}\big)\big(F(x+n) - F(x)\big)$;
б) $f(0) + \dots + f(n-1) = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx + B_1(f(n) - f(0)) + B_2\frac{f'(n) - f'(0)}{2} + \dots,$
где интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно формально понимать как разность $F(b) - F(a)$ ("формула Эйлера–Маклорена").

Задача 3. Выразите сумму $S_k(n) := 1^k + \dots + n^k$ через числа Бернулли.

Задача 4. $B_0 = 1$; $B_n = -\displaystyle\sum_{k<n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n-k+1}$.

▷ Напомним, что число сюръекций n-элементного множества на k-элементное есть $k!\left\{{n \atop k}\right\}$ (это можно считать определением *чисел Стирлинга второго рода*).

Задача 5*. а) $x^n = \displaystyle\sum_{k\leqslant n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\downarrow k}$; б) $B_n = \displaystyle\sum_{k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k+1}\, k! \left\{{n \atop k}\right\}$.

Задача 6. Выразите коэффициенты ряда а) $\frac{x}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{x}{2}$; б) $\frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$; в*) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ через числа Бернулли.

Дополнительная часть: Значения ζ-функции

Задача 7. Формула Эйлера для котангенса имеет вид

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}.$$

а) Обе части формулы обладают свойством $f(x) = \frac{1}{2}[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)]$.
б) Если непрерывная на всей прямой функция, удовлетворяющая функциональному уравнению выше, принимает максимальное значение, то она принимает его и в нуле.
в) Докажите формулу Эйлера.

▷ **Определение 3.** $\zeta(s) := \sum \frac{1}{n^s}$.

Задача 8. а) Как функция $\sum \zeta(2k)x^{2k}$ связана с котангенсом?
б) Выразите $\zeta(2k)$ через B_{2k} и вычислите $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

Задача 9. Положим $\eta(-s) := \sum (-1)^{n-1} n^s$. Тогда $\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$.

▷ Эйлер заметил, что при фиксированном натуральном k формальный ряд $\sum (-1)^{n-1} n^k t^n$ является рациональной функцией от t и определил $\eta(-k)$ как значение этой функции при $t=1$, а $\zeta(-k)$ — как $-\frac{\eta(-k)}{2^{k+1}-1}$.

Задача 10. Вычислите $\zeta(0)$ («$1+1+1+\ldots$») и $\zeta(-1)$ («$1+2+3+4+\ldots$») «по Эйлеру».

Задача 11. а) $\sum\limits_{n>0} (-1)^{n-1} n^k t^n$ — рациональная функция от t. б) $\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}$.