Вероятность I: Случайные события и условная вероятность

▷ **Определение 1.** *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество, элементам которого (“элементарным событиям” / “исходам”) приписаны некоторые неотрицательные числа (“вероятности”), сумма которых равна единице.

Событием называется произвольное подмножество вероятностного пространства. *Вероятностью* $P(S)$ *события* S называется сумма вероятностей составляющих его (“благопритствующих ему”) элементарных событий.

▷ Например, бросанием правильной монеты называют множество $X = \{\text{орел}, \text{решка}\}$, в котором обоим элементам приписана вероятность $1/2$; бросание неправильной монеты — то же множество, но с вероятностями p и $1 - p$.

Задача 0. Какое вероятностное пространство соответствует бросанию (правильного) игрального кубика? пары игральных кубиков?

▷ **Определение 2.** *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество X вместе с отображением (“вероятностной мерой”) $P\colon 2^X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обладающим следующими свойствами
0) $P(\varnothing) = 0$;
1) $P(X) = 1$;
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (“аддитивность”).

Задача 1. Два определения конечного вероятностного пространства эквивалентны.

Задача 2. Бросают два кубика, красный и зеленый.
а) Найдите вероятности событий «в сумме на двух кубиках выпало число n».
б) С какой вероятностью на красном кубике выпало число большее, чем на зеленом?

Задача 3. Оцените вероятность наличия в классе из n учеников двух учеников с одинаковыми днями рождения — велика она или мала?
(Эта вероятность велика, если учеников больше n_0, мала, если их меньше n_0 — а вот чему равно это n_0, при котором вероятность примерно равна $1/2$, и надо выяснить. Возможно, для этого пригодится калькулятор/компьютер.)

Задача 4. Колоду из 54 карт сдают на троих, пока не выпадет туз. Кому с наибольшей вероятностью достанется туз? А с наименьшей?

▷ **Определение 3.** Пусть (X, P) — вероятностное пространство, $Y \subset X$ — событие, имеющее ненулевую вероятность. Тогда на множестве X можно задать новую вероятностную меру $P(-|Y)$ формулой
$$P(A|Y) = \frac{P(A \cap Y)}{P(Y)}.$$
Говорят, что $P(A|Y)$ есть “вероятность события A при условии, что событие Y произошло”.

Два события A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (если вероятность события B ненулевая, это равносильно тому, что $P(A|B) = P(A)$).

Задача 5. а) Являются ли события «выпало четное число» и «выпало делящееся на 3 число» независимыми при бросании кубика?
б) Рассмотрим случайное число от 1 до 100. Являются ли события «число делится на 2» и «число делится на 3» независимыми?

Задача 6. Имеется три карточки: черная, белая, а также черная с одной стороны и белая с другой. Одну из карточек случайным образом положили на стол. Оказалось, что ее верхняя сторона белая. Какова вероятность того, что нижняя сторона тоже белая?

Задача 7. Тест на заболевание с вероятностью 96% дает позитивный результат для больного человека и с той же вероятностью — негативный результат для здорового. Тестирование некоторого человека дало позитивный результат. Какова вероятность, что этот человек болен, если всего больных 0,5%?

Задача 8. Пусть (X, P) — вероятностное пространство, $X = \sqcup X_i$ (т. е. всегда происходит ровно одно из событий X_i). Выразите $P(X_k|A)$ через вероятности $P(X_i)$ и $P(A|X_i)$. (Получающаяся формула, *формула Байеса*, объясняет, как изменяется оценка вероятности исходов X_i после появления информации A.)

Задача 9. На заводе имеется три цеха, которые выпускают 20%, 30% и 50% продукции завода, допуская брак с вероятностью 3%, 3% и 5%. С какой вероятностью бракованное изделие произведено именно во втором цехе?

Задача 10. Правильную монету бросили n раз. Какова вероятность того, что орел выпадет ровно k раз?

Задача 11. Оцените (с точностью, например, $\pm 1\%$) вероятность того, что орел выпадет ровно в половине случаев, если правильную монету бросили а) 10; б*) 10^{100} раз.
в**) Какого отклонения доли орлов от $1/2$ разумно ожидать, если правильную монету бросили 100 раз?

Задача 12*. Какова вероятность того, что на выборах с участием двух кандидатов, из которых первый набрал p, а второй $q < p$ голосов, первый будет опережать второго в течение всего времени подсчета голосов? (“Теорема Бертрана.”)