Группы

▷ **Определение 1.** Совокупность биекций множества E на себя называется *группой преобразований* (множества E), если она замкнута относительно композиции и взятия обратного и содержит тождественное отображение.

Примеры:
- группа перестановок (всех биекций фиксированного множества на себя);
- группа движений плоскости (биекций плоскости на себя, сохраняющих расстояния);
- группа симметрий фигуры (движений, сохраняющих данную фигуру);
- группа автоморфизмов поля (биекций поля на себя, согласованных с операциями).

Задача 0. Сколько элементов в группе симметрий а) прямоугольника; б) квадрата? Сколько среди них поворотов, а сколько отражений?

Задача 1. Являются ли группами
а) множество A_n четных перестановок; б) множество нечетных перестановок;
в) множество поворотов плоскости; г) множество параллельных переносов плоскости?

▷ **Определение 2.** Отображение групп называется *гомоморфизмом*, если оно переводит тождественное преобразование в тождественное, а композицию — в композицию. Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

Задача 2. а$_0$) Группа вращений правильного треугольника изоморфна A_3.
а) Группа вращений (правильного) тетраэдра изоморфна A_4.
б) Группа вращений куба изоморфна S_4.
в*) Группа вращений додекаэдра изоморфна A_5.
(Вопрос-указание: какие объекты переставляют эти группы?)

▷ **Определение 3.** Множество G вместе с бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$ и выделенным элементом $e \in G$ называется (абстрактной) *группой*, если
1) $\forall a, b, c \in G\ (ab)c = a(bc)$; 2) $\forall a \in G\ ae = a = ea$; 3) $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = e = a^{-1}a$.

Примеры:
- $\mathbb{Z}/n$ или $\mathbb{Z}$ по сложению (“циклическая группа”);
- произвольное кольцо R по сложению;
- множество обратимых элементов $R^\times$ произвольного кольца R по умножению.

Определение 2 легко переносится на абстрактные группы. Если группы G и G' изоморфны, пишут $G \cong G'$. Примеры: $S_2 \cong \mathbb{Z}/2$, $A_3 \cong \mathbb{Z}/3$.

Задача 3. а$_1$) $\mathbb{R}^\times_{>0} \cong \mathbb{R}$ (“группа положительных вещественных чисел по умножению изоморфна группе вещественных чисел по сложению”); а$_2$) $\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{R}$;
б) $\mathbb{C}^\times \cong S^1 \times \mathbb{R}$ (где окружность S^1 можно понимать либо как множество комплексных чисел единичной нормы, либо как $\mathbb{R} \bmod 2\pi$ с естественной операцией);
в) $\mathbb{Q}^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ (где символ $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ обозначает совокупность финитных последовательностей целых чисел);
г$^*_1$) $\mathbb{F}_p^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)$; г$^*_2$) $\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)$.

Задача 4. Изоморфны ли группы а) $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ и $\mathbb{Z}/nm$; б*) S_n и $A_n \times \mathbb{Z}/2$;
й$_1$) симметрий квадрата и $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$; й$_2$) симметрий прямоугольника и $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$;
в) симметрий тетраэдра и $A_4 \times \mathbb{Z}/2$; г) симметрий тетраэдра и S_4?

Задача 5. Любая абстрактная группа изоморфна группе преобразований некоторого множества *("теорема Кэли")*.

▷ **Определение 4.** Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Фактор-множество группы G по отношению эквивалентности "отличаться умножением справа на элемент из H" обозначается G/H.

Задача 6. а) $|G| = |G/H| \cdot |H|$; в частности, порядок[1] подгруппы делит порядок группы *("теорема Лагранжа")*.
б) Порядок элемента делит порядок группы (в частности, $\forall g \in G\ g^{|G|} = e$).

Задача 7. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, где $\varphi(n)$ — количество обратимых остатков по модулю n; в частности, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Задача 8. Опишите все подгруппы и отношения включения между ними для
а) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n$; б) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$; в) S_3; г*) S_4; д*) S_5.

Задача 9а. Группа из p элементов является циклической.

Задача 9*. Опишите все группы из б) p^2; в) $2p$; г) pq элементов (p и q простые).

▷ **Определение 5.** *Ядром* гомоморфизма групп $\varphi\colon G \to G'$ называется прообраз единицы при этом отображении (обозначение: $\operatorname{Ker}\varphi$).

Задача $9\frac{1}{2}$. Убедитесь, что четность — гомоморфизм из S_n в $\mathbb{Z}/2$. Что является его ядром?

Задача 10. Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — гомоморфизм.
а) $\operatorname{Ker}\varphi$ — подгруппа группы G; б) $\forall g \in G\ \forall h \in \operatorname{Ker}\varphi\ \ g^{-1}hg \in \operatorname{Ker}\varphi$.

▷ **Определение 6.** Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальной*, если

$$\forall g \in G\ \forall h \in H\ g^{-1}hg \in H.$$

(Естественно, любая подгруппа коммутативной группы нормальна.)

Задача 11. Какие из следующих подгрупп являются нормальными
а) $A_n \subset S_n$;
б) $S_{n-1} \subset S_n$ (слева — все перестановки, оставляющие на месте последний элемент);
в) $\{\pm E\} \subset O_2$ (где O_2 — все матрицы 2×2, сохраняющие расстояния);
г*) $\{\pm 1\} \subset Sp_1$ (где Sp_1 — кватернионы единичной нормы)?

Задача 12. Если подгруппа $H \subset G$ нормальна, то на множество G/H корректно спускается операция умножения, превращая его в группу.

Задача 13. $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$ для любого[2] гомоморфизма φ.

Задача 14. Подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она является ядром некоторого гомоморфизма.

Задача 15. Найдите факторгруппы по нормальным подгруппам из задачи 11.

---

[1] Т. е. количество элементов.
[2] «Гомоморфный образ группы
канорическим морфизмом
изоморфен факторгруппе
по ядру гомоморфизма.»

Задача 16. а) Опишите все нормальные подгруппы групп S_3 и S_4; б) найдите соответствующие факторгруппы.

Задача 17. У а) A_5; б*) A_n (при $n \geqslant 5$) нет (нетривиальных) нормальных подгрупп.

Задача 18. При $n \geqslant 5$ знак — единственный (по существу) нетривиальный гомоморфизм из перестановок в коммутативную группу.

Задача 19*. Любая конечно-порожденная коммутативная группа является произведением циклических.