Анализ II: Предел последовательности

▷ **Определение 1.** Последовательность (ε_n) называется *бесконечно малой*, если $(\varepsilon_n) = o(1)$, т. е. если она по модулю асимптотически меньше любого положительного числа.

Говорят, что число c является является *пределом* последовательности (x_n), если последовательность (x_n) отличается от числа c на бесконечно малую последовательность (т. е. $(x_n) = c + (\varepsilon_n)$, где (ε_n) — бесконечно малая последовательность). Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

▷ **Определение 2.** ε-окрестностью числа a называется множество чисел, отстоящих от него менее чем на $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Говорят, что число c является *пределом* последовательности, если в любой ε-окрестности числа c лежат почти все члены этой последовательности.

▷ **Определение 3.** Говорят, что число c является *пределом* последовательности (x_n), если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ |x_n - c| < \varepsilon$$

Задача 1. Три определения выше эквивалентны.

Задача 2. Запишите при помощи кванторов (и без использования отрицания) утверждение «число c не является пределом последовательности (x_n)».

Задача 3. Вычислите пределы следующих последовательностей
а) $1, -1, 1, -1, \ldots$; б) $1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots$; в) $1, -{}^1/_2, {}^1/_4, -{}^1/_8, \ldots$; г) $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots$.

Задача 4. Может ли последовательность иметь два различных предела?

Задача 5. Две последовательности имеют равные пределы тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой.

Задача 6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
(здесь и далее равенство понимается в том смысле, что если существует правая часть, то существует и левая, и они равны).
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Задача 7. Верно ли, что $\lim P(x_n) = P(\lim x_n)$ для
а) многочлена; б) рациональной; в*) произвольной функции P?
(Решив эту задачу, поучительно вернуться к задаче 5б) листка «Асимптотические неравенства».)

Задача 8. Пусть а) $(x_n) < (y_n)$; б) $(x_n) \leqslant (y_n)$ и обе последовательности сходятся. Обязательно ли соответствующее неравенство выполняется и для пределов?

Задача 9. Если $(x_n) \preccurlyeq (y_n) \preccurlyeq (z_n)$ и последовательности x_n и z_n имеют одинаковый предел, то и последовательность y_n сходится, причем к тому же пределу (*“принцип двух милиционеров”*).

Задача 10. Вычислите пределы следующих последовательностей
а) $\dfrac{an+b}{cn+d}$; б) $\dfrac{a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0}{b_kn^k+\ldots+b_1n+b_0}$; в) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; г) $\dfrac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$;
д) $\sqrt[n]{n}$; е*) $\sqrt[n]{2^n+3^n}$; ж*) $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

Задача 11. Какие из следующих утверждений верны:
а) если последовательность (x_n) имеет предел, то последовательность $(x_{n+1}-x_n)$ бесконечно мала;
б) если последовательность $(x_{n+1}-x_n)$ бесконечно мала, то последовательность (x_n) имеет предел;
в) если последовательность (x_n) имеет предел, то последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ стремится к 1;
г) если последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ стремится к 1, то последовательность (x_n) имеет предел?

Задача 12. Считая, что пределы последовательностей ниже существуют, найдите их.
а) $x_n=\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}}_{n}$; б*) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$; г) $1+q+\cdots+q^n$;
д) $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n-x_n^2$; е) $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$;

Задача 13. Если последовательность (x_n) монотонно неубывает, то $\lim x_n=\sup\{x_n\}$ (в частности, если монотонная последовательность ограничена, то у нее есть предел).

Задача 14. Выясните, какие из пределов задачи 12 существуют.

Задача 15*. Пусть последовательность (x_n) стремится к числу c. Обязательно ли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=c?$$

Задача 16*. а) Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (этот предел обозначается буквой e).
б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$.