Расширения полей II: Степень расширения

▷ **Определение 1.** Пусть L/K — расширение полей (т. е. K — подполе поля L). Тогда L можно рассматривать как векторное пространство над K. Размерность $[L : K]$ этого пространства называется *степенью расширения*. Расширение, имеющее конечную степень, называется *конечным*.

Задача 1. Чему равна а) степень $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$; б) степень $[\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2]$?

Задача 2. а) Если поле из p элементов вложено в поле из q элементов, то число q — степень числа p. б) Количество элементов конечного поля — степень простого числа.

Задача 3. а) Расширение $K(\sqrt{d})/K$ имеет степень 2.
б) Если P — неприводимый многочлен степени n, то $[K[x]/(P) : K] = n$.

Задача 4. а) Если есть башня из трех полей $F \subset K \subset L$, то $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.
б) Если L/F — расширение полей степени n, то степень любого промежуточного расширения K/F делит число n.

Задача 5. Найдите а) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$; б) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$; в) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

▷ Пусть на плоскости введена система координат. Будем сопоставлять каждому набору $\mathcal{K}$ точек подполе K действительных чисел, порожденное всеми координатами этих точек.

Задача 6. Коэффициенты уравнения
а) прямой, проходящей через пару точек из $\mathcal{K}$;
б) окружности с центром в точке из $\mathcal{K}$ и проходящей через точку из $\mathcal{K}$
лежат в K.

Задача 7. Пусть $\mathcal{L}$ получается из $\mathcal{K}$ добавлением точки пересечения
а) двух прямых; б) прямой и окружности; в) двух окружностей с коэффициентами из K.
Чему может равняться степень расширения L/K?

Задача 8. Если число α можно получить из элементов поля $K \subset \mathbb{R}$ при помощи циркуля и линейки, то $[K(\alpha) : K]$ — степень двойки.

Задача 9. Циркулем и линейкой нельзя построить отрезок в $\sqrt[3]{2}$ длиннее данного (то есть задача об удвоении куба не имеет решения).

Задача 10. Найдите минимальный многочлен числа а) $\cos\frac{\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{5}$; в*) $\cos\frac{\pi}{7}$.
Указание. Используйте равенства вида $\cos n\varphi = \cos m\varphi$.

Задача 11. Задача о трисекции угла не имеет решения.

Задача 12. а) Конечное расширение алгебраично[1]. (Верно ли обратное?)
б) Если расширение порождено (как поле) конечным набором алгебраических элементов, то оно конечно и его степень не превосходит произведения степеней этих элементов.

Задача 13. Если L/K — произвольное расширение, то множество его элементов, алгебраичных над K, образует поле (в частности, алгебраические числа образуют поле).

[1] Определение можно найти в листке «Расширения полей I».