Комплексные числа

▷ **Определение 1.** Поле $\mathbb{C} := \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ называется полем *комплексных чисел.* При этом вместо $\sqrt{-1}$ часто пишут символ i.

Задача 1. Вычислите а) $(1+i)^2$; б) $(1+2i)(1-2i)$; в$_0$) $\sqrt{7+24i}$; в) $\sqrt{1+i}$.

Задача 2. Вычислите а) i^{-1}; б) $(1+i)^{-1}$; в) $(3+4i)^{-1}$.
г) Найдите явную формулу для $(a+bi)^{-1}$.

▷ **Определение 2.** Будем далее отождествлять комплексное число $a+bi$ с точкой (a,b) евклидовой плоскости.

Полярные координаты соответствующей точки называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа.

Задача 3. Убедитесь, что для любого комплексного числа a отображение умножения на a ($m_a\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto az$) является линейным отображением и найдите его матрицу. Когда это отображение является поворотом? каков угол этого поворота?

Задача 4. а) Любой поворот имеет вид $z\mapsto az+b$. б) Композиция поворотов — поворот.

Задача 5. а) Три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ вещественно.
б*) Четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ вещественно.

Задача 6*. а) Комплексное *дробно-линеное преобразование* ($z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) переводит прямые и окружности в прямые и окружности.
б) Будем называть матрицей преобразования $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ матрицу $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ (определенную с точностью до умножения на ненулевую константу). Тогда при композиции дробно-линейных преобразований матрицы перемножаются.

Задача 7. а) $(\cos\phi+i\sin\phi)(\cos\psi+i\sin\psi)=\cos(\phi+\psi)+i\sin(\phi+\psi)$;
$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$.
б) Докажите, что $\cos n\phi$ выражается через $\cos\phi$ как некоторый многочлен ("многочлены Чебышева") и выпишите эти многочлены для $n=2,3,4$.
в*) Найдите сумму $\cos\phi+\cos 2\phi+\dots+\cos 2012\phi$.

Задача 8. При перемножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.

Задача 9. Сколько решений в комплексных числах имеет уравнение а) $z^n=1$; б) $z^n=a$? Как выглядит множество этих решений на плоскости?

Задача 10. а) Корни уравнения $z^n=1$ суть степени некоторого комплексного числа ζ_n ("первообразного корня из единицы степени n").
б*) Сколько всего существует первообразных корней из единицы степени n?

Задача 11. Найдите сумму
а) корней из единицы степени n; б) квадратов корней из единицы степени n;
в) $\zeta_3-\zeta_3^2$; г*) $\zeta_5-\zeta_5^2-\zeta_5^3+\zeta_5^4$; д*) $\zeta_7+\zeta_7^2-\zeta_7^3+\zeta_7^4-\zeta_7^5-\zeta_7^6$.
е**) Сформулируйте и докажите обобщение последних трех пунктов.

Задача 12. а) Делится ли многочлен $x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \dots + x^{1111} + 1$ на многочлен $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$?
б) Найдите НОД многочленов $x^n + 1$ и $x^m + 1$.
в*) Пусть $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdot \ldots \cdot [1]$. Докажите, что

$$\frac{[n]!}{[n-k]! \cdot [k]!}$$

явлеется многочленом от q; чему равно значение этого многочлена при $q = 1$?

Задача 13*. Для всякого непостоянного многочлена $P \in \mathbb{C}[z]$
а) $|P(z)| \gg 1$ (т. е. $\forall C \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists N \in \mathbb{R} : \forall z\, (z > N \to P(z) > C)$);
б) $\forall z\, \exists z' : |P(z')| < |P(z)|$;
в) $\inf |P(z)| = 0$.

Задача 14 (основная теорема алгебры). а*) Непостоянный комплексный многочлен имеет корень. *Указание:* воспользуйтесь принципом вложенных отрезков.
▷ Утверждением пункта а) можно далее пользоваться без доказательства.
б) Комплексный многочлен степени n имеет, с учетом кратностей, ровно n корней.

▷ **Определение 3.** *Сопряженным* к комплексному числу $z = a + bi$ называется число $\overline{z} = a - bi$.

Задача 15. а) “Сопряжение является автоморфизмом поля комплексных чисел”:
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}; \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$
б) Если многочлен P имеет вещественные коэффициенты, то $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

Задача 16. а) Если многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет, с учетом кратностей, ровно k (вещественных) корней, то $n \equiv k \mod 2$ (в частности, любой многочлен нечетной степени имеет корень).
б) Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$.

Задача 17. Разложите а) в $\mathbb{R}[x]$; б*) в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен $x^7 - 1$ на неприводимые множители.

Задача 18*. а) Вещественный многочлен принимает неотрицательные значения во всех действительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы квадратов других многочленов с действительными коэффициентами.
б) Вещественный многочлен принимает положительные значения во всех положительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде отношения двух многочленов с неотрицательными коэффициентами.