Кватернионы и вращения

▷ **Определение 1.** Пусть V — трехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом i, j, k. Алгеброй *кватернионов* называется векторное пространство $\mathbb{H} := \mathbb{R} \oplus V$ с ассоциативным умножением, определямым правилом $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Задача 1. Составьте таблицу умножения базисных элементов 1, i, j, k.

Задача 2*. Проверьте, что умножение, задаваемое таблицей из предыдущей задачи, действительно ассоциативно.
Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.

▷ **Определение 2.** *Нормой* кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ называется действительное число $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *Сопряженным* к кватерниону $q = a + v$ называется кватернион $\bar{q} := a - v$.

Задача 3. а) $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q$; б) $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Задача 4. а) Если два целых числа представимы в виде суммы четырех квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы четырех квадратов.
б) Аналогичное утверждение для сумм трех квадратов неверно.

Задача 5. Кватернионы образуют *тело*: для них выполнены все аксиомы поля, за исключением коммутативности умножения.

Задача 6. Выразите $(q_1q_2)^{-1}$ через q_1^{-1} и q_2^{-1}.

▷ **Определение 3.** *Векторным произведением* двух векторов u и v в $\mathbb{R}^3$ называется вектор $[u, v]$, перпендикулярный плоскости векторов u и v и имеющий длину $|u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi$.

Задача 7. Если u и v два вектора, то $uv = -(u, v) + [u, v]$, где $(-, -)$ — скалярное произведение, а $[-, -]$ — векторное произведение.

Задача 8. Выясните, в какие тождества для скалярного и векторного произведения превращается ассоциативность кватернионного умножения $(uv)w = u(vw)$ и докажите тождество Якоби, $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Задача 9. а) Если v — вектор единичной длины, то $v^2 = -1$.
б) Если u и v два ортогональных вектора, то $uv = -vu$.

Задача 10. Отображение $\mathrm{Ad}_q : v \mapsto qvq^{-1}$ а) переводит вектора в вектора; б) является движением.

Задача 11. Найдите матрицу оператора Ad_q для а) $q = i$; б) $q = \cos\phi + i\sin\phi$; что это за движение?

Задача 12. а) Любой поворот вокруг оси можно представить в виде Ad_q для некоторого кватерниона q единичной нормы.
б) Сколькими способами это можно сделать?

Задача 13. а) Композиция сохраняющих начало координат вращений трехмерного пространства — вращение.
б) Движение пространства, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой оси.

Задача 14. а) Пусть r — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси $(1, 0, 0)$, а t — на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси $(1, 1, 1)$. Найдите ось и угол поворота $s = rt$.
б) Сколько всего вращений можно получить, компонуя преобразования r и t?

Дополнительная часть

Задача 15. Рассмотрим кватернионы как двумерное комплексное векторное пространство: $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$.
а) Найдите матрицы (левого) умножения на элементы 1, i, j, k.
б) Алгебра кватернионов изоморфна алгебре комплексных матриц[1] 2×2 вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$.

Задача 16. Убедитесь, что отображение Ad задает сюръективный гомоморфизм $Sp_1 \to SO_3$ и найдите его ядро.

Задача 17. а) Найдите группу вращений тетраэдра.
б) Опишите явно прообраз $2T$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
(Совет: тетраэдр удобно взять вписанным в стандартный единичный куб.)
в*) Выпуклая оболочка точек из $2T$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 18. а) Найдите группу вращений куба (или октаэдра).
б) Опишите явно прообраз этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
Предупреждение: выпуклая оболочка этих точек правильного многогранника *не* образует.

Задача 19*. а) Группа вращений додекаэдра (или икосаэдра) изоморфна группе A_5.
б) Опишите явно прообраз $2I$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
в) Выпуклая оболочка точек из $2I$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 20. Если q — кватернион единичной нормы, то отображение $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto -q\bar{v}q$ является отражением 4-мерного пространства относительно 3-мерного подпространства с нормалью q.

Задача 21. а) Если l и r — кватернионы единичной нормы, то $m_{l,r} \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto lvr^{-1}$ — движение 4-мерного пространства.
б) Отображение $m \colon Sp_1 \times Sp_1 \to SO_4$ является сюръективным гомоморфизмом.
в) Найдите ядро этого гомоморфизма.

[1] Отсюда следует, в частности, ассоциативность кватернионного умножения.