Геометрические преобразования I: Дважды два

▷ Выберем на плоскости некоторую точку O. Тогда каждая точка плоскости отождествляется с вектором (радиус-вектором из точки O) — соответственно, точки можно складывать и умножать на числа.

Зафиксируем теперь еще систему координат с началом в точке O. Тогда плоскость отождествляется с $\mathbb{R}^2$. Точку с координатами x и y будем обозначать через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

▷ **Определение 1.** *Линейным отображением* плоскости в себя называется отображение вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Таблица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *матрицей* этого отображения (в данной системе координат).

Задача 0. Тождественное отображение имеет матрицу $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1. Найдите образы точек $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также образ единичного квадрата при отображении с матрицей

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите матрицы линейных отображений, переводящих

а) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$; в) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$.

Задача $2\frac{1}{2}$. Линейное отображение однозначно задается образами любых двух непропорциональных векторов.

Задача 3. Любое линейное отображение
а) оставляет начало координат на месте;
б) переводит прямые в прямые;
в) сохраняет параллельность прямых.

Задача 4*. Всякое ли а) биективное; б) произвольное преобразование плоскости, оставляющее на месте начало координат и переводящее прямые в прямые, является линейным?

Задача 5. Отображение $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является линейным тогда и только тогда, когда оно обладает следующими тремя свойствами
- $A(0) = 0$;
- $\forall u, v \in \mathbb{R}^2\ A(u+v) = A(u) + A(v)$;
- $\forall v \in \mathbb{R}^2\, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ A(\lambda v) = \lambda A(v)$.

Задача 6. Линейное отображение сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Задача 7. Пусть три чевианы делят три стороны треугольника в отношениях α_1, α_2 и α_3. Тогда то, пересекаются ли они в одной точке, зависит только от чисел α_i (а от формы треугольника не зависит).
Указание: любые два треугольника равны с точностью до линейного преобразования.

Задача 8*. Как при линейном отображении с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ изменяется площадь
а) единичного квадрата; б) произвольного параллелограмма; в) произвольного многоугольника?
г) Отображение с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ биективно тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

▷ **Определение 2.** *Полярными координатами* точки плоскости называются ее расстояние до начала координат и азимут (отсчитываемый против часовой стрелки угол[1] радиус-вектора с осью x).

Задача 9. Точка с полярными координатами (r, ϕ) имеет декартовы координаты $\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$.

Задача 10. Найдите а) матрицу поворота на $90°$; б) матрицу $R(\phi)$ поворота на угол ϕ.

Задача 11. а) Линейное преобразование сохраняет углы тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид либо $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. (Что это за преобразования геометрически?)
б) Какие линейные преобразования сохраняют расстояния?

▷ **Определение 3.** *Произведением* матриц, соответствующих линейным отображениям A и B, называется матрица их композиции, $AB := A \circ B$.

Задача 12. а) Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
б) Вычислите произведение $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ("строка на столбец").
в) Коммутативно ли умножение матриц?

Задача 13*. Решите уравнения а) $A^2 = E$; б) $A^2 = -E$.

Задача 14. Вычислите явно произведение $R(\phi)R(\psi)$. Какие тригонометрические тождества дает равенство $R(\phi)R(\psi) = R(\phi + \psi)$?

[1] Можно считать, что этот угол лежит в $\mathbb{R} \mod 2\pi$ — т. е. является числом, определенным с точностью до прибавления $2\pi k$.