Общая топология I: Множества на прямой

▷ **Определение 1.** Множество C точек отрезка $[0;1]$, у которых есть троичная запись без цифры 1, называется *стандартным канторовым множеством.*

Задача 1. Найдите мощность стандартного канторова множества.

Задача 2. а) Множество $[0;1]\setminus C$ является объединением счетного числа непересекающихся интервалов.
б) Найдите сумму длин этих интервалов.
в*) Значение этой суммы не зависит от порядка суммирования.

▷ **Определение 2.** Подмножество X прямой называется *нигде не плотным*, если внутри любого интервала можно найти подинтервал, не пересекающийся с множеством X.

Задача 3. Стандартное канторово множество нигде не плотно.

Задача 4* (теорема Бэра). Отрезок нельзя покрыть счетным объединением нигде не плотных множеств.

▷ **Определение 3.** Пусть M — подмножество прямой. Точка прямой называется *внутренней*, если некоторая ее окрестность целиком содержится в M; *внешней*, если она внутренняя для $\mathbb{R}\setminus M$. Остальные точки прямой называются *граничными.*

Задача 5. Найдите внутренние, внешние и граничные точки следующих множеств:
а) конечное множество; б) отрезок, интервал, полуинтервал; в) $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; г) C.

▷ **Определение 4.** Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Задача 6. Какие из множеств задачи 5 открыты?

Задача 7. Верно ли, что
а) у конечных или счетных множеств нет внутренних точек;
б) граница множества совпадает с границей его дополнения;
в) внутренность любого множества открыта;
г) граница любого множества имеет пустую внутренность;
д) граница открытого множества конечна или счетна?

Задача 8. Верно ли, что
а) пересечение конечного набора; б) пересечение произвольного набора;
в) объединение конечного набора; г) объединение произвольного набора
открытых множеств открыто?

Задача 9. а) Компонента связности (придумайте определение сами) открытого множества — интервал или (открытый) луч.
б) Множество открыто, если и только если оно есть объединение непересекающихся интервалов и лучей; в) ...причем число интервалов не более чем счетно.

▷ **Определение 5.** Пусть M — подмножество прямой. Точка прямой называется *предельной точкой* множества M, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек множества M. Точка множества M называется *изолированной*, если некоторая ее окрестность не содержит других точек M.

Задача 10. Найдите предельные и изолированные точки множеств задачи 5.

▷ **Определение 6.** Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 11. Какие из множеств задачи 5 замкнуты?

Задача 12. Верно ли, что
а) любая точка множества либо предельная, либо изолированная;
б) у конечных множеств все точки изолированные;
в) граничная точка, принадлежащая множеству, является его предельной точкой;
г) внешняя точка не может быть предельной;
д) все предельные точки внутренние;
е) все внутренние точки предельные;
ж) любое несчетное замкнутое множество содержит отрезок;
з) замкнутое множество есть объединение своих предельных и изолированных точек;
и) множество предельных точек любого множества замкнуто?

Задача 13. Множество M замкнуто, если и только если вместе с любой сходящейся последовательностью оно содержит ее предел.

Задача 14. Множество замкнуто, если и только если его дополнение открыто.

Задача 15. Решите задачу, аналогичную задаче 8, для замкнутых множеств.

Задача 16*. Любое ли подмножество прямой представимо как объединение счетного числа замкнутых?

▷ **Определение 7.** Множество называется *совершенным*, если оно совпадает с множеством своих предельных точек.

Непустое подмножество отрезка называется *канторовым*, если оно совершенно и не содержит внутренних точек.

Задача 17. а) Любое канторово множество замкнуто и нигде не плотно.
б) Может ли оно содержать изолированные точки?

Задача 18. а) Множество чисел, которые можно записать в пятеричной системе без цифр 1 и 3, канторово. б) Множество чисел, которые можно записать в троичной системе без цифры 2, канторово.

Задача 19. а) Любое канторово множество равномощно стандартному. б*) Эту биекцию можно построить так, чтобы она и обратная к ней переводили сходящиеся последовательности в сходящиеся.

Задача 20*. «Длина» стандартного канторова множества равна нулю. А бывают ли канторовы множества положительной «длины»?

Задача 21. а) Рассмотрим замкнутое множество без внутренних точек. Выбросим все изолированные точки. Получим ли мы совершенное множество? б*) Любое несчетное замкнутое множество имеет мощность континуум... в*) и представляется в виде объединения совершенного множества и не более чем счетного множества.