Анализ I: Асимптотические неравенства

▷ **Определение 1.** Будем говорить, что одна последовательность *асимптотически* не больше другой, если соответствующее неравенство выполнено для всех членов последовательностей, начиная с некоторого:

$$(x_n) \preccurlyeq (y_n) \iff \exists N : \forall n \geqslant N\ x_n \leqslant y_n.$$

Задача 1. Является ли $\preccurlyeq$ отношением линейного порядка на множестве всех последовательностей действительных чисел?

Задача 2. Что больше асимптотически:
а) n^2 или $100n$; б) $(n+100)^2$ или n^3-2n; в) 2011^n или $n!$; г) $\sqrt{n}$ или $n^{(-1)^n}$?

▷ **Определение 2.** Будем говорить, что последовательность (x_n) *асимптотически существенно* меньше последовательности (y_n), если асимптотическое неравенство выполняется и после умножения на любую константу:

$$(x_n) \ll (y_n) \iff \forall C \in \mathbb{R}\ (Cx_n) \preccurlyeq (y_n).$$

Вместо $(x_n) \ll (y_n)$ часто пишут $x_n = o(y_n)$.

Задача 3. Пусть $(X_n) \gg (a_n)$, $(X_n) \gg (b_n)$. Верно ли, что а) $(X_n) \gg (a_n+b_n)$; б) $(X_n) \gg (a_nb_n)$?

Задача 4. Сформулируйте и докажите правило асимптотического сравнения произвольных многочленов. (Верно ли, например, что если $\deg P < \deg Q$, то $P \preccurlyeq Q$?)

Задача 5. а) Любой многочлен нечетной степени принимает как положительные, так и отрицательные значения. б*) Любой многочлен нечетной степени имеет корень.

▷ **Определение 3.** Последовательность называется *бесконечно большой*, если она асимптотически больше любого действительного числа (т. е. если она асимптотически существенно больше единицы).

Задача 6. Докажите, что бесконечно большая последовательность не ограничена сверху. Верно ли обратное?

Задача 7. Является ли бесконечно большой а) сумма двух бесконечно больших последовательностей; б) произведение двух бесконечно больших последовательностей; в) разность двух бесконечно больших последовательностей; г) разность бесконечно большой и ограниченной последовательностей?

Задача 8. Сформулируйте условие на коэффициенты, при котором последовательность $x_n = \frac{a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0}{b_kn^k+\ldots+b_1n+b_0}$ бесконечно велика.

Задача 9*. Убедитесь, что *рациональные функции* (т. е. функции вида P/Q, где P и Q — многочлены) с асимптотическим отношением порядка образуют неархимедово упорядоченное поле.

Задача 10. Докажите, что $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$ при $x > -1$ для а) натуральных α; б*) рациональных $\alpha > 1$; в*) действительных $\alpha > 1$ (“неравенство Бернулли”).

Задача 11. Что асимптотически больше: а) $1{,}001^n$ или n^{1000}; б) $0{,}99^n$ или n^{-10}?

Задача 12. а) Функция a^n не равна никакому многочлену. б) Никакая нетривиальная линейная комбинация ненулевых показательных функций не равна нулю.