Приближение действительных чисел рациональными

Задача 1. Охотник стоит в точке плоскости с координатой $(0,0)$, а в остальных точках с целыми координатами сидят одинаковые зайцы. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он обязательно попадет в зайца.

Задача 2. Найдите $\sup\big(\sin x + \sin\sqrt{2}x\big)$.

Задача 3. Десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой последовательности цифр.

▷ **Определение 1.** Будем говорить, что дробь ${}^p/_q$ приближает число α с *коэффициентом качества* δ, если

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{\delta}{q}.$$

Задача 4. Число α может быть сколь угодно качественно приближено дробью тогда и только тогда, когда оно иррационально.

Задача 5. Число $e = \sum \dfrac{1}{i!}$ иррационально.

▷ **Определение 2.** Число α будем называть k-*приближаемым*, если для любого $\delta > 0$ существует такая дробь ${}^p/_q$, что

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{\delta}{q^k}.$$

Если же такой дроби для некоторого $\delta > 0$ не существует, будем называеть число k-*неприближаемым.*

Задача 6. а) Число $\sqrt{2}$ является 2-неприближаемым.
б) Алгебраическое число степени k является k-неприближаемым *(теорема Лиувилля).*

Задача 7. Число $\sum \dfrac{1}{10^{i!}}$ трансцендентно.

Задача 8. Любое иррациональное число обладает бесконечным число 2-приближений с коэффициентом 1 (в частности, является $(2-\varepsilon)$-приближаемым).

Задача 9*. Множество всех $(2+\varepsilon)$-приближаемых чисел *имеет меру ноль*[1].

[1] Т. е. для каждого положительного δ существует покрытие этого множества не более чем счетным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит δ.