Многочлены II: Неприводимые многочлены и остатки

▷ **Определение 1.** Непостоянный многочлен называется *неприводимым*, если он не может быть разложен в произведение многочленов меньших степеней.

Задача 1. а) Любой линейный многочлен неприводим.
б) Неприводимый многочлен степени больше 1 не имеет корней. (Верно ли обратное утверждение?)

Задача 2. а) Многочлен x^3-2 неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
б*) При каких d многочлен $\frac{x^d-1}{x-1}$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$?
в*) Есть ли в $\mathbb{Q}[x]$ неприводимый многочлен степени 2011?

▷ **Определение 2.** Если любой общий делитель многочленов P и Q делит их общий делитель S, то говорят, что S – *наибольший общий делитель* многочленов P и Q.

Если НОД двух многочленов равен 1, то говорят, что они *взаимно просты*.

Задача 3. Вычислите НОД (в $\mathbb{R}[x]$)
а) $x^{2011}+1$ и x^2+2x+1; б) $x^{2011}+x-1$ и x^3-x^2-3x-1;
в) $x^{20}+1$ и $x^{15}+1$; г) $x^{57}+1$ и x^2-x+1;
д) x^4+4x^2+3 и $x^6+5x^4+6x^2+1$.

Задача 4. Наибольший общий делитель двух многочленов существует и единственен с точностью до умножения на ненулевую константу.

▷ **Определение 3.** Через (P) будем обозначать множество многочленов, кратных P.

Задача 5. а) Существует линейное представление НОДа.
б) Если многочлены P и Q взаимно просты, то $(P)\cap(Q)=(PQ)$.
в) Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для кольца многочленов.

Задача 6. Могут ли два взаимно простых многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ иметь общий иррациональный корень?

▷ **Определение 4.** Говорят, что корень x_0 многочлена P имеет *кратность* n, если наибольшая степень $(x-x_0)$, на которую делится P, равна n.

Задача 7. Утверждение задачи 15 предыдущего листка останется верным, даже если считать корни с кратностями.

Задача 8*. Может ли неприводимый многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ иметь кратный иррациональный корень?

▷ **Определение 5.** Фактормножество кольца многочленов $K[x]$ по отношению эквивалентности «$A\sim B \iff A-B\in(P)$» будем обозначать через $K[x]/(P)$.

Задача 9. Сформулируйте и докажите китайскую теорему об отстатках для многочленов.

Задача 10. а) Выведите из китайской теоремы об остаках существование многочлена, принимающего в данных точках данные значения.
б) Найдите явную формулу для многочлена степени n, принимающего значения d_i в точках x_i ($i=0,\dots,n$).

Задача 11*. а) На множество $K[x]/(P)$ корректно спускается сложение и умножение многочленов, превращая его в кольцо[1].
б) Пусть $P = x^2 - d$. Тогда кольцо $K[x]/(P)$ изоморфно кольцу $K(\sqrt{d})$ из определения 3 листка «Поля».
в) Пусть поле K конечно и в нем q элементов, а степень многочлена P равна n. Сколько элементов в кольце $K[x]/(P)$?

Задача 12*. Является ли кольцо $\mathbb{R}[x]/(P)$ полем при
а) $P = x^2$; б) $P = x^2 + 1$; в) $P = x^2 - 1$?

Задача 13*. Выясните, какому из колец из предыдущей задачи изоморфно кольцо $\mathbb{R}[x]/(ax^2 + bx + c)$ в зависимости от a, b и c.

Задача 14*. Найдите такие p и P, что кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(P)$ является полем из а) 9; б) 27; в) 2011^2 элементов.

Задача 15*. Сколько в $\mathbb{F}_p[x]$ неприводимых многочленов степени d? (Например, в каждой ли степени есть неприводимый многочлен?)

[1]Этим утверждением можно далее пользоваться без доказательства.