Комбинаторика V: Непересекающиеся пути и определители

▷ **Определение 1.** Будем называть граф Γ *направленным*, если на множестве его вершин задана *функция высоты* h (например, в целые числа). Ребра направленного графа будем считать ориентированным так, чтобы все они вели вниз.

Количество путей из вершины s в вершину t будем обозначать через $P(s \to t)$; через $P[S \to T]$ будем обозначать *матрицу* количеств путей из вершин из множества S в вершины из множества T.

Задача 1. Вычислите $P(s \to t)$ для (всех узлов) квадратной решетки.

Задача 2. Количество пар *непересекающихся* путей на квадратной решетке, первый из которых ведет из s_1 в t_1, а второй — из s_2 в t_2 равно[1] определителю матрицы путей

$$\begin{pmatrix} P(s_1 \to t_1) & P(s_2 \to t_1) \\ P(s_1 \to t_2) & P(s_2 \to t_2) \end{pmatrix}.$$

▷ **Определение 2.** *Произведение матриц* определяется формулой

$$(A \circ B)_{ij} = \sum_s A_{is} B_{sj}$$

(естественно, это определение имеет смысл только если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B).

Задача 3. Пусть Γ — направленный граф, $a > b > c$. Тогда

$$P\big[h^{-1}(a) \to h^{-1}(c)\big] = P\big[h^{-1}(b) \to h^{-1}(c)\big] \circ P\big[h^{-1}(a) \to h^{-1}(b)\big].$$

▷ **Определение 3.** *Определителем* квадратной матрицы (a_{ij}) называется число

$$\det(a_{ij}) := \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам.

Задача 4. а) При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак. В частности, определитель матрицы с одинаковыми строками равен нулю.
б) При умножении строки матрицы на число λ определитель увеличивается в λ раз.
в) При прибавлении к i-й строке матрицы j-й строки, умноженной на число λ, определитель не меняется.

Задача 5*. Свойства из предыдущей задачи вместе с нормировкой $\det E = 1$ однозначно задают определитель.

Задача 6 (лемма Линдстрёма–Гесселя–Вьено). Сформулируйте и докажите
а) аналог утверждения задачи 2 для наборов из n путей;
б) обобщение последнего утверждения на произвольный направленный граф.
Указание. Попробуйте обойтись без формулы включений–исключений.

---

[1] По крайней мере, если точки s_i лежат на прямой $y = -x$, а точки t_i — на прямой $x = c$; можете попробовать сформулировать и общее условие, при котором эта формула верна.

▷ **Определение 4.** *Определителем Вандермонда* называется многочлен

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n) := \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

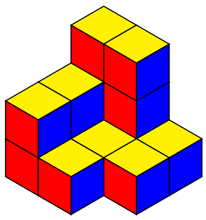
Задача 7. а) Вычислите определитель Вандермонда.
Указание. Какой ответ получается при $n = 3$? А если разложить на множители?

б) Дан набор многочленов $P_0,\ldots,P_{n-1}$, причем $\deg P_i = i$. Найдите определитель матрицы $\big(P_{i-1}(x_j)\big)$.

Задача 8. Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — набор натуральных чисел. Найдите количество непересекающихся наборов путей на квадратной решетке из точек $(1-i, i-1)$ в точки $(0, a_i)$. Разумеется, требуется не только написать определитель, но и вычислить его.

Задача 9. Найдите число треугольных таблиц из $n(n+1)/2$ целых чисел с верхней строкой $a_1,\ldots,a_n$, в которых каждое число не меньше левого верхнего соседа, но меньше правого верхнего соседа *("таблицы Гельфанда–Цетлина")*.

▷ *Трехмерная диаграмма Юнга* — это башня из кубиков в углу комнаты в духе



(дайте формальное определение самостоятельно).

Задача 10. Найдите количесто трехмерных диаграмм Юнга внутри коробки а) $a\times b\times 1$; б) $a \times b \times 2$.

Задача 11. Количество трехмерных диаграмм Юнга внутри коробки $a \times b \times c$ может быть найдено по *формуле Макмагона*

$$\prod \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2},$$

где произведение ведется по ячейкам коробки (т. е. по $1 \leqslant i \leqslant a, 1 \leqslant j \leqslant b, 1 \leqslant k \leqslant c$).

Дополнительная часть: Миноры и матричная теорема о деревьях

▷ **Определение 5.** *Минором* матрицы называется определитель ее (квадратной) подматрицы A_{IJ}, получающейся если оставить только элементы a_{ij}, такие что $i \in I$, $j \in J$.

Задача 12. Миноры произведения могут быть найдены по *формуле Коши–Бине*

$$\det(AB)_{IJ} = \sum_S \det A_{IS} \cdot \det B_{SJ},$$

где суммирование ведется по всем k-элементным подмножествам множества индексов[2]. В частности, для квадратных матриц определитель произведения равен произведению определителей.
Указание. Лемма LGV останется верна и если приписать ребрам графа произвольные веса.

▷ **Определение 6.** Пусть Γ — ориентированный граф. Его (ориентированной) *матрицей инцидентности* называется матрица ∂, строки которой соответствуют вершинам, столбцы — ребрам, а элементы определяются следующим образом

$$\partial_{ve} = \begin{cases} -1, & v \text{ — начало ребра } e; \\ 1, & v \text{ — конец ребра } e; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 13. Пусть в графе Γ вершин на одну больше, чем ребер. Максимальный минор матрицы Γ равен ± 1, если Γ является деревом, и 0 иначе.

Задача 14. Для произвольного графа Γ главный минор *матрицы Лапласа* $\Delta = \partial\partial^*$ (где ∂^* — *транспонированная* матрица) равен числу остовных деревьев графа.

Задача 15. На диагонали матрицы Δ стоят степени вершин, а вне диагонали — (-1) для пар вершин, соединенных ребром, и 0 для не соединенных.

Задача 16. Найдите число деревьев с n пронумерованными вершинами.
Указание. Примените матричную теорему к полному графу.

[2] Ср. с определением умножения матриц.