Многочлены I: Коэффициенты и значения

▷ **Определение 1.** *Монóмом* от одной переменной с коэффициентами в поле K называется запись вида ax^n (n — целое неотрицательное число, a — элемент поля K, а x — формальный символ) с точностью до отождествления $0x^n = 0x^m$. При этом вместо ax^0 пишут просто a.

Кольцом многочленов от одной переменной над полем K называется множество $K[x]$ конечных формальных сумм мономов[1] с естественными операциями.

Задача 1. а) Дайте определение суммы и произведения многочленов.
б*) Многочлены действительно образуют кольцо[2].

Задача 2. Вычислите $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 6(x-1) + 4$.

Задача 3. Для многочлена $(...((x-2)^2-2)^2...-2)^2$ (всего 200 пар скобок) вычислите а) свободный член; б) коэффициент при x.

▷ **Определение 2.** *Значением* монома ax^n в точке x_0 называется число ax_0^n. Значением многочлена P в точке x_0 называется сумма значений его мономов в этой точке.

Если $P(x_0) = 0$, то говорят, что число x_0 — *корень* многочлена P.

Задача 4. Пусть $P(x) = (1+\sqrt{2}x)^{100}$. Докажите, что $P(1) + P(-1)$ — целое число.

Задача 5. Вычислите $\binom{100}{0} + 4\binom{100}{2} + \dots + 2^{100}\binom{100}{100}$.

Задача 6. Докажите, что у многочлена
а) $(1+x+x^2+\dots+x^{2011})(1-x+x^2-\dots+x^{2010}-x^{2011})$;
б) $(1+2x+3x^2+\dots+2012x^{2011})(1-2x+3x^2-\dots+2011x^{2010}-2012x^{2011})$
все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю.

Задача 7. Существует ли непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, все значения которого в целых точках — простые числа?

Задача 8. Пусть P — ненулевой многочлен с вещественным коэффициентами. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x)(x-1)$ быть неотрицательны?

▷ **Определение 3.** Говорят, что моном ax^n ($a \neq 0$) имеет *степень* n. Степенью многочлена называется наибольшая из степеней входящих в него (ненулевых) мономов (степень нулевого многочлена будем считать равной $-\infty$). Обозначение: $\deg P$.

Задача 9. Пусть $\deg P = n$, $\deg P = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P+Q$? А многочлена $P \cdot Q$?

Задача 10. а) Пусть A и B — многочлены над полем K, $A \neq 0$. Тогда B ровно одним образом можно представить в виде $AQ+R$, так что $Q, R \in K[x]$, $\deg R < \deg A$.
б) Верно ли это, если K — не поле, а, например, кольцо целых чисел?

▷ **Определение 4.** Многочлены Q и R из предыдущей задачи называются, соответственно, *неполным частным* и *остатком* при делении многочлена B на многочлен A.

Задача 11. а) При каких p и q многочлен x^4+1 делится на многочлен x^2+px+q?
б) Разложите многочлен x^4+1 на множители.

[1] При этом накладывается соотношение дистрибутивности: $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$.
[2] Этим утверждением далее можно пользоваться без доказательства.

Задача 12. а) Разделите с остатком x^{100} на $x-1$ и на $x+1$ *(указание: делить можно в столбик).*
б) Сформулируйте и докажите признаки делимости на $x-1$ и на $x+1$.

Задача 13 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена на $x-a$ есть значение этого многочлена в точке a.

Задача 14. Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — различные корни многочлена P, то он делится на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)$.

Задача 15. Многочлен степени n имеет не более n корней.

Задача 16. а) Если два многочлена степени не выше n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.
б*) Докажите, что для любого набора из $n+1$ точки существует многочлен степени не выше n, принимающий в этих точках предписанные значения; найдите для этого многочлена явную формулу.

Задача 17*. а) Разложите многочлен $x^p - x$ над полем $\mathbb{F}_p$ на линейные множители.
б) Исходя из полученного разложения вычислите коэффициент при x. Что за тождество получается?

Задача 18*. Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

Задача 19*. Если многочлен принимает целые значения в целых точках, то его коэффициенты — рациональные числа.