Действительные числа II: Полнота

▷ Пусть A и B — подмножества линейно упорядоченного множества $(M, \preccurlyeq)$. Условимся писать $A \preccurlyeq B$, если $a \preccurlyeq b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Будем говорить, что элемент x *разделяет* множества A и B, если $A \preccurlyeq x \preccurlyeq B$ (другими словами, если x является верхней гранью множества A и нижней множества B).

▷ **Определение 1.** Упорядоченное множество $(M, \preccurlyeq)$ называется *полным*, если для любых непустых подмножеств A и B, таких что $A \preccurlyeq B$, существует разделяющий их элемент.

Задача 1. Какие из следующих линейно упорядоченных множеств полны?
а) $\{1, \ldots, n\}$; б) $\mathbb{Z}$; в) $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$; г) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; д) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
е*) (бесконечные) последовательности нулей и единиц;
ж*) финитные последовательности нулей и единиц.
(В последних четырех пунктах порядок лексикографический.)
Полно ли множество функций из $\mathbb{N}$ в себя с порядком
з*) $f \preccurlyeq g \iff \forall n\ f(n) \leqslant g(n)$; и*) $f \preccurlyeq g \iff \exists N : \forall n \geqslant N\ f(n) \leqslant g(n)$?

▷ **Определение 2.** Наименьшая из верхних граней множества A называется его *точной верхней гранью*. Обозначение: $\sup A$ (“supremum”).

Аналогичным образом определяется $\inf A$ (“infimum”), точная нижняя грань множества A.

Задача 2. Запишите при помощи кванторов, что значит, что а) $c = \sup A$; б) $c \neq \sup A$.

Задача 3*. Упорядоченное множество полно тогда и только тогда, когда любое его ограниченное сверху непустое подмножество имеет точную верхнюю грань.

Соглашение. Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

Задача 4. Найдите (в $\mathbb{Q}$) а) $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; б) $\sup\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
в) $\sup\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; г*) $\sup\left\{1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 5. Верно ли, что для любых непустых ограниченных подмножеств A и B упорядоченного поля а) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; б) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?
(Напомним, что $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$; $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.)

Задача 6. Упорядоченное поле $\mathbb{Q}$ не полно.
Указание: рассмотрите множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ и докажите, что его точная верхняя грань является квадратным корнем из двух.

Задача 7*. а) Полное упорядоченное поле единственно.
б) Полное упорядоченное поле существует.

Соглашение. Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

▷ **Определение 3.** Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Задача 8*. Дайте определение а) рациональной; б) произвольной степени положительного действительного числа. Докажите его корректность. Проверьте естественные свойства возведения в степень ($(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$).

▷ **Определение 4.** *Отрезком* упорядоченного множества $(M, \preccurlyeq)$ называется множество $[a; b] = \{x \in M : a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$.

Задача 9 (принцип вложенных отрезков). а) Любая последовательность (I_n) вложенных (т. е. $I_n \supset I_{n+1}$) отрезков действительных чисел имеет общий элемент.
б) Этот элемент единственен, если и только если точная нижняя грань длин этих отрезков равна нулю.

Задача 10. а) Действительные числа — архимедово поле.
б) Произвольное действительное число α может быть сколь угодно хорошо приближено рациональным: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, {}^p/_q \in \mathbb{Q} : |\alpha - {}^p/_q| < \varepsilon$.

Задача 11. а) Любое действительное число является единственной общей точкой некоторой последовательности вложенных отрезков с рациональными концами.
б) ...причем первый отрезок можно выбрать единичным с целыми концами, а каждый следующий — одной из половин предыдущего (“двоичная запись действительного числа”). Единственным ли способом это можно сделать?
в*) Действительные числа равномощны множеству $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ последовательностей нулей и единиц.

Задача 12. Пусть S — некоторое множество действительных чисел. Рассмотрим следующую игру (“игра Банаха–Мазура для S”). Двое по очереди выбирают отрезки ненулевой длины так, что каждый следующий отрезок строго вложен в предыдущий. Если пересечение получившейся (после счетного числа ходов) последовательности вложенных отрезков состоит ровно из одной точки, лежащей в S, то выиграл первый; в противном случае — второй.
а) Множество S конечно, второй может выбирать только одну из двух половин отрезка. Предъявите выигрышную стратегию для второго игрока.
б) $S = \mathbb{Q}$. Предъявите выигрышную стратегию для одного из игроков.
в**) Для любого ли подмножества S действительных чисел один из игроков имеет выигрышную стратегию?

Задача 13. Множество действительных чисел несчетно.

Задача 14*. а) Архимедово упорядоченное поле, в котором выполнен принцип вложенных отрезков, полно.
б*) Существенно ли требование архимедовости?

Задача 15*. На поле существует архимедов порядок тогда и только тогда, когда оно изоморфно подполю действительных чисел.

Дополнительная часть: Дедекиндовы сечения

▷ **Определение 5.** Пусть $(M, \preccurlyeq)$ — линейно упорядоченное множество. Будем говорить, что пара его непустых подмножеств L и R является *дедекиндовым сечением*, если L — множество всех нижних граней множества R, а R — множество всех верхних граней множества L (обозначение: $L \mid R$).

Задача 16. а) Для любого дедекиндова сечения $L \mid R$
— либо найдется такой элемент $x \in M$, что $L = \{m \in M \mid m \preccurlyeq x\}$, $R = \{m \in M \mid x \preccurlyeq m\}$ («тривиальное сечение»),
— либо для множеств L и R не существует разделяющего элемента («щель»).
б) Для любых дедекиндовых сечений $L \mid R$ и $L' \mid R'$
— либо $L \subset L'$, $R \supset R'$ («$L \mid R \preccurlyeq L' \mid R'$»),
— либо $L \supset L'$, $R \subset R'$ («$L' \mid R' \preccurlyeq L \mid R$»).

Задача 17. а) Любая пара подмножеств, такая что $L \preccurlyeq R$, может быть увеличена до дедекиндова сечения. (Единственным ли способом можно это сделать?)
б) Если в упорядоченном множестве нет щелей, то оно полно.

▷ **Определение 6.** Множество $\widehat{M}$ дедекиндовых сечений множества M с порядком из предыдущей задачи называется *пополнением по Дедекинду* упорядоченного множества M. (Элементы M при этом отождествляются с тривиальными сечениями.)

Задача 18. Опишите упорядоченное множество $\widehat{M}$ для а) упорядоченных множеств из первой задачи; б) объединения двух интервалов в $\mathbb{R}$.

Задача 19. а) $\widehat{M}$ полно. б) M *плотно* в $\widehat{M}$ (т. е. любой элемент из $\widehat{M}$ является точной нижней гранью какого-то подмножества из M и точной верхней гранью какого подмножества из M).

Задача 20*. *Пополнением* упорядоченного множества M называется его вложение в полное упорядоченное множество в качестве плотного подмножества.
а) Любое монотонное отображение из множества M в полное упорядоченное множество T можно (монотонно) продолжить на пополнение множества M.
б) Пополнение единственно с точностью до изоморфизма.

Задача 21. а) Определите на множестве $\widehat{\mathbb{Q}}_{>0}$ дедекиндовых сечений *положительных* рациональных чисел сложение и умножение.
б) $\widehat{\mathbb{Q}}$ является полным упорядоченным полем (т. е. полем действительных чисел — в частности, действительные числа существуют).

Задача 22*. Что произойдет, если попытаться пополнить неархимедово поле? (Не получим ли мы полного неархимедова поля?)